УДК 517.518.87

Ц. Ж. Юмова, И. Б. Юмов

ПОСТРОЕНИЕ СЕРИЙ РЕШЁТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ С РЕГУЛЯРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На основании функционально-аналитического метода теории кубатурных формул [3] построены элементарные функционалы погрешности на плоскости с узлами, лежащими внутри или же на границе произвольной гладкой области. Построены серии решётчатых кубатурных формул с регулярным пограничным слоем, оптимальные по коэффициентам. Выполнены требования согласованности порядка сходимости с шагом решётки и гладкостью функции вдоль выбранных координатных направлений. Это позволило свести к минимуму норму функционала и тем самым улучшить качество формул. В узлах решёток этих формул были определены коэффициенты, учитывающие дифференциальную природу подынтегральной функции. Рассчитанные коэффициенты улучшают качества оптимальных кубатурных формул в анизотропных пространствах Соболева. Результаты полученных методов проверены на контрольных задачах с известными решениями.

Ключевые слова: оптимальные кубатурные формулы, функциональные пространства Соболева, регулярный пограничный слой.

Предварительные сведения и обозначения. Пусть $k=1,..,n$, $h_k>0$ — шаги решётки, x_k — узлы формулы, C_k — коэффициенты формулы, m_k — гладкость функции по координатным направлениям, $\overline{m}=(m_1,m_2,...,m_n)$, $m^*=n\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}m_k^{-1}\right)$, $\overline{h}=\operatorname{diag}(h_1,h_2,..,h_n)$ — матрица периодов, $\Delta_{\overline{h}}=\{x\in E_n,\quad 0\le x_k<h_k\}$ — фундаментальный параллелепипед с длинами рёбер h_k, $\Delta_{\overline{h}}=\ h^n=\det\overline{h}\ne 0$, $\Delta=\{x\in E_n, 0\le x_k<1\}$ — фундаментальный единичный куб, N_k — количество узлов формулы вдоль выбранного направления, $N=\prod_{k=1}^{n}N_k$, $B_0=\{\gamma\,|\,\gamma\in E_n, 0\le\gamma_k<N_k$, $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=N_k\}$ — ньютоновская система узлов.

Юмова Цыренханда Жэмбэевна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики (Бурятский государственный университет, Улан-Удэ); e-mail: e-mail: syum@mail.ru.

Юмов Игорь Бимбаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений (Бурятский государственный университет, Улан-Удэ); e-mail: igyumov@mail.ru.

Известно [1], что анизотропное пространство $W_p^{\overline{m}}(E_n)$ при $1 \le p \le \infty$ является полным, сепарабельным при $1 \le p < \infty$ и при $1 < p < \infty$ рефлексивно и равномерно выпуклым.

В работе исследуются кубатурные формулы на классах периодических функций анизотропного пространства с матрицей периодов $\overline{h}$. Построенные формулы будут использованы для целого семейства подынтегральных элементов пространства $W_p^{\overline{m}}(E_n)$ с естественной нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{\overline{m}}(E_n)} = \left[\int_{E_n}\left(|\varphi(x)|^p + \sum_{k=1}^n \left|D^{m_k}\varphi(x)\right|^p\right)dx\right]^{1/p} < \infty.$$

В рамках функционально-аналитического метода погрешность рассматривается как линейный ограниченный функционал над анизотропным пространством основных функций. Функционал представляет собой разность

$$\langle l_\Omega, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)dx - \sum_{k=1}^N C_k\varphi(x^{(k)})$$

между интегралом и приближающей его линейной комбинацией значений подынтегральной функции. В качестве основной выступает подынтегральная функция, а обобщенной — разность характеристической функции области интегрирования и линейной комбинации дельта-функций $\delta(x)$ Дирака, которые имеют смысл при воздействии на непрерывные пробные функции. Отсюда требование, чтобы основное пространство было вложено в пространство непрерывных функций $W_p^{\overline{m}}(E_n) \subset C(E_n)$, обеспечиваемое условием вложения $p - \sum_{k=1}^n m_k^{-1} > 0$ [2].

Это вложение непрерывно, т. е. функционал погрешности кубатурной формулы не только линеен, но и ограничен на $W_p^{\overline{m}}(E_n)$. Знание численной мажоранты для его нормы в сопряжённом пространстве $W_p^{\overline{m}*}(E_n)$ позволяет получать для произвольной функции гарантированные оценки близости истинного значения интеграла по n-мерной ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ

$$I(f) = \int_\Omega f(x)dx$$

к рассматриваемой на ней кубатурной сумме

$$K_N(f) = \sum_{k=1}^N C_k\varphi(x^{(k)}).$$

Общее представление норм функционала погрешности и экстремальной функции. Для отыскания функционала погрешности кубатурной формулы в соответствующем пространстве требуется доказать, что он является регулярной обобщенной функцией. В дальнейшем такое представление используется для нахождения нормы функционала, которая уже непосредственно определяет границы погрешности приближения. В свою очередь, для отыскания нормы функционала погрешности используется экстремальная функция, которая является обобщённым решением некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Дифференциальный оператор $L(D)=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{m_k}D^{2m_k}$, входящий в такое уравнение, порождается видом нормы функции в основном пространстве.

Доказано в [4], что при $\varphi\in W_p^{\overline{m}}$, $u\in W_{p'}^{\overline{m}}$ любой финитный линейный функционал $l\in W_p^{\overline{m}^*}$ удовлетворяет уравнению $L(D)u=l(x)$ и представим в виде:

$$\langle l,\varphi\rangle=\int_{E_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{m_k}D^{m_k}u*D^{m_k}\varphi\,dx.$$

При выполнении условия $p-\sum_{k=1}^{n}m_k^{-1}>0$ в $\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\overline{h}})$, где $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, периодический функционал погрешности $\widetilde{l}_0(h^{-1}x)=1-\Phi_0(h^{-1}x)$ имеет вид:

$$\left\langle\widetilde{l}_0(h^{-1}x),\varphi(x)\right\rangle_{\Delta_{\overline{h}}}=\int\limits_{\Delta_{\overline{h}}}\sum_{k=0}^{n}\left(D^{m_k}\psi_0(h^{-1}x)+h_k^{m_k}C_k^{(0)}\right)D^{m_k}\varphi(x)dx, \qquad (1)$$

его норма определяется равенством

$$\left\|\widetilde{l}_0(h^{-1}x)\right\|_{\widetilde{W}_p^{\overline{m}^*}(\Delta_{\overline{h}})}=\left(\int\limits_{\Delta_{\overline{h}}}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{\beta\neq0}\frac{(2\pi ih_k^{-1}\beta_k)^{m_k}e^{-2\pi ih_k^{-1}\beta_kx_k}}{\mu(\beta)}+h_k^{m_k}C_k^{(0)}\right|^{p'}dx\right)^{1/p'},$$

а норма экстремальной функции $\varphi_0(h^{-1}x)$ имеет представление

$$\left\|\varphi_0(h^{-1}x)\right\|_{\widetilde{W}_p^{\overline{m}}(\Delta_{\overline{h}})}=\left(\int\limits_{\Delta_{\overline{h}}}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{\beta\neq0}\frac{(2\pi ih_k^{-1}\beta_k)^{m_k}e^{-2\pi ih_k^{-1}\beta_kx_k}}{\mu(\beta)}+h_k^{m_k}C_k^{(0)}\right|^{p'}dx\right)^{1/p}.$$

Построение элементарных функционалов погрешностей на плоскости. Построение серии решётчатых кубатурных формул, асимптотически оптимальных относительно интегрируемых функций всецело зависит от нормы функционала погрешности в соответствующем пространстве. Особенность анизотропного пространства в том, что в узлах решётки кубатурной формулы коэффициенты определены с учётом дифференциальной природы подынтегральной функции по выбранным координатным направлениям. При оценке качества той иной кубатурной формулы предпочтение отдаётся той, функционал погрешности которой имеет меньшую норму.

Для построения наилучшей кубатурной формулы при заданной ньютоновской системе B_0 узлы возьмём лежащими строго внутри или же в границе гладкой области Ω, при фиксированных шагах $h_1, h_2, ..., h_n$ вдоль выбранных координатных направлений. Минимизируем кубатурную формулу по коэффициентам C_{γ_k} с учётом согласованности порядка сходимости с шагом решётки и гладкостью функции по координатным направлениям, определяемым с помощью системы соотношений $h_1^{m_1} = h_2^{m_2} = ... = h_n^{m_n} = h^{m^*}$. Распределение узлов x_k внутри произвольной гладкой области Ω, учитывающей свойства анизотропного пространства, возьмем в вершинах параллелепипедальной решётки. В этом случае узлы x_k можно найти по формуле $x_k = h_k \gamma_k$, нумеруя их с помощью мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ с целочисленными координатами. Коэффициенты кубатурной формулы

$$\langle l, \varphi \rangle = \int_0^{1-\sigma_1 h_1} \int_0^{1-\sigma_2 h_2} \cdots \int_0^{1-\sigma_n h_n} \varphi(x_1, x_2, .., x_n) dx_1\, dx_2 \cdots dx_n -$$

$$- \sum_{\gamma_1=0}^{N_1} \sum_{\gamma_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{N_n} C\gamma_1 C\gamma_2 \cdots C\gamma_n\, \varphi(\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_n) = \int_{\hat{\Delta}} \varphi(x) dx - \sum_{\gamma \in B_0} C_\gamma\, \varphi(\gamma)\,, \qquad (2)$$

выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{\gamma_k=0}^{m_i} C_{\gamma_k}\, \gamma_k^{\alpha_k} = \frac{1-\sigma_k h_k}{\alpha_k + 1}, \quad \alpha_k = 0,1,..., m_k \qquad (3)$$

при любом значении гладкости функции m_k, k=1,2, ..., n. Выбор коэффициентов из системы (3) обеспечивает наиболее быстрое при $N \to \infty$ приближение интеграла $I(f)$ кубатурной формулой $K_N(f)$.

Пример. Используя построенную формулу, вычислить интеграл $\int_0^1 \int_0^1 (x^3 + y^5) dx\, dy$ с проверкой качества с известным решением.

Беря декартово произведение коэффициентов, вычисленных с помощью равенства (3), для решётчатой кубатурной формулы, точно интегрирующей многочлен третьей степени по переменной x_1, и многочлен пятой степени по переменной x_2, имеем

$$C_{00}=C_0^{(1)}C_0^{(2)}=\frac{3}{8}\cdot\frac{95}{288}=\frac{285}{2304},\ C_{01}=C_0^{(1)}C_1^{(2)}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1427}{1440}=\frac{4281}{11520},$$

$$C_{02}=C_0^{(1)}C_2^{(2)}=\frac{3}{8}\left(-\frac{133}{240}\right)=\left(-\frac{399}{1920}\right),\ C_{03}=C_0^{(1)}C_3^{(2)}=\frac{3}{8}\cdot\frac{241}{720}=\frac{723}{5760},$$

$$C_{04}=C_0^{(1)}C_4^{(2)}=\frac{3}{8}\left(-\frac{173}{1440}\right)=\left(-\frac{519}{11520}\right),\ C_{05}=C_0^{(1)}C_4^{(2)}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{160}=\frac{9}{1280},$$

$$C_{10}=C_1^{(1)}C_0^{(2)}=\frac{19}{24}\cdot\frac{95}{288}=\frac{1805}{6912},\quad C_{11}=C_1^{(1)}C_1^{(2)}=\frac{19}{24}\cdot\frac{1427}{1440}=\frac{1805}{34560},$$

$$C_{12}=C_1^{(1)}C_2^{(2)}=\frac{19}{24}\left(-\frac{133}{240}\right)=-\frac{2527}{5760},\ C_{13}=C_1^{(1)}C_3^{(2)}=\frac{19}{24}\cdot\frac{241}{720}=\frac{4579}{17280}\ ,$$

$$C_{14}=C_1^{(1)}C_4^{(2)}=\frac{19}{24}\left(-\frac{173}{1440}\right)=\left(-\frac{3287}{34560}\right),\ C_{15}=C_1^{(1)}C_5^{(2)}=\frac{19}{24}\cdot\frac{3}{160}=\frac{57}{3840},$$

$$C_{20}=\left(-\frac{5}{24}\right)\cdot\frac{95}{288}=\left(-\frac{475}{6912}\right),\ C_{21}=C_2^{(1)}C_1^{(2)}=\left(-\frac{5}{24}\right)\frac{1427}{1440}=\left(-\frac{7135}{34560}\right),$$

$$C_{22}=\left(-\frac{5}{24}\right)\left(-\frac{133}{240}\right)=\frac{665}{5760},\ C_{23}=C_2^{(1)}C_3^{(2)}=\left(-\frac{5}{24}\right)\cdot\frac{241}{720}=-\frac{1205}{17280},$$

$$C_{24}=\left(-\frac{5}{24}\right)\left(-\frac{173}{1440}\right)=\frac{865}{34560},\ C_{25}=C_2^{(1)}C_5^{(2)}=\left(-\frac{5}{24}\right)\cdot\frac{3}{160}=\left(-\frac{15}{3840}\right),$$

$$C_{30}=C_3^{(1)}C_0^{(2)}=\frac{1}{24}\frac{95}{288}=\frac{95}{6912},\quad C_{31}=C_3^{(1)}C_1^{(2)}=\frac{1}{24}\cdot\frac{1427}{1440}=\frac{1427}{34560},$$

$$C_{32}=C_3^{(1)}C_2^{(2)}=\frac{1}{24}\left(-\frac{133}{240}\right)=\left(-\frac{133}{5760}\right),\ C_{33}=C_3^{(1)}C_3^{(2)}=\frac{1}{24}\cdot\frac{241}{720}=\frac{241}{17280},$$

$$C_{34}=C_3^{(1)}C_4^{(2)}=\frac{1}{24}\left(-\frac{173}{1440}\right)=\left(-\frac{173}{34560}\right),\ C_{35}=C_3^{(1)}C_5^{(2)}=\frac{1}{24}\cdot\frac{3}{160}=\frac{3}{3840}\ .$$

Найденные коэффициенты подставим в формулу (2), оптимальную относительно интегрируемых функций, зависящих от гладкости по направлениям:

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \approx$$

$$\approx C_{00}\varphi(0,0)+C_{01}\varphi(0,1)+C_{02}\varphi(0,2)+C_{03}\varphi(0,3)+C_{04}\varphi(0,4)+C_{05}\varphi(0,5)+$$

$$+C_{10}\varphi(1,0)+C_{11}\varphi(1,1)+C_{12}\varphi(1,2)+C_{13}\varphi(1,3)+C_{14}\varphi(1,4)+C_{15}\varphi(1,5)+$$

$$+C_{20}\varphi(2,0)+C_{21}\varphi(2,1)+C_{22}\varphi(2,2)+C_{23}\varphi(2,3)+C_{24}\varphi(2,4)+C_{25}\varphi(2,5)+$$

$$+C_{30}\varphi(3,0)+C_{31}\varphi(3,1)+C_{32}\varphi(3,2)+C_{33}\varphi(3,3)+C_{34}\varphi(3,4)+C_{35}\varphi(3,5).$$

$$\int_0^1\int_0^1 (x_1^3+x_2^5)dx_1dx_2 \approx \frac{285}{2304}\varphi(0,0)+\frac{4281}{11520}\varphi(0,1)+$$

$$+\left(-\frac{399}{1920}\right)\varphi(0,2)+\frac{723}{5760}\varphi(0,3)+\left(-\frac{519}{11520}\right)\varphi(0,4)+\frac{9}{1280}\varphi(0,5)+$$

$$+\frac{1805}{6912}\varphi(1,0)+\frac{27113}{34560}\varphi(1,1)+\left(-\frac{2527}{5760}\right)\varphi(1,2)+\frac{4579}{17280}\varphi(1,3)+$$

$$+\left(-\frac{3287}{34560}\right)\varphi(1,4)+\frac{57}{3840}\varphi(1,5)+\left(-\frac{475}{6912}\right)\varphi(2,0)+\left(-\frac{7135}{34560}\right)\varphi(2,1)+$$

$$+\frac{665}{5760}\varphi(2,2)+\left(-\frac{1205}{17280}\right)\varphi(2,3)+\frac{865}{34560}\varphi(2,4)+\left(-\frac{15}{3840}\right)\varphi(2,5)+$$

$$+\frac{95}{6912}\varphi(3,0)+\frac{1427}{34560}\varphi(3,1)+\left(-\frac{133}{5760}\right)\varphi(3,2)+\frac{241}{6912}\varphi(3,3)+$$

$$+\left(-\frac{173}{34560}\right)\varphi(3,4)+\frac{3}{3840}\varphi(3,5)=\frac{5}{12}\approx 0{,}4166666667.$$

Полученный результат подтверждает тот факт, что построенная элементарная кубатурная формула точно интегрирует многочлен третьей степени по x_1, и многочлен пятой степени по x_2, и совпадает с аналитическим значением интеграла, который также равен $\frac{5}{12}$.

Построение кубатурной формулы с пограничным слоем. Функционалы с регулярным пограничным слоем на плоскости строятся путём суммирования элементарных, как в обычном анализе формулы получаются суммированием элементарных формул прямоугольников при различных шагах решётки h_1, h_2. Для этого преобразуем функционал

$$\left\langle l_{\Delta_{\bar{h}}}, \varphi(x_1,x_2)\right\rangle = \int_0^1\int_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left[\int_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1 - \sum_{\gamma_1}^{m_1} h_1 C_{\gamma_1}\varphi(h_1\gamma_1,x_2)\right]dx_2 +$$

$$+\sum_{\gamma_1=0}^{m_1} h_1 C_{\gamma_1}\left[\int_0^1 \varphi(h_1\gamma_1,x_2)dx_2 - \sum_{\gamma_2=0}^{m_1} h_2 C_{\gamma_2}\varphi(h_1\gamma_1,h_2\gamma_2)\right].$$

Формула с регулярным пограничным слоем для прямоугольника с длинами рёбер h_1, h_2 вдоль координатных осей OX_1 и OX_2 соответственно будет иметь вид:

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \approx h_1 h_2 \sum_{\gamma_1=0}^{m_1}\sum_{\gamma_2=0}^{m_1} C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}\varphi(h_1\gamma_1,h_2\gamma_2).$$

$$\frac{1}{h_1 h_2}\int_0^1\int_0^1 \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2 \approx$$

$$\approx C_0 D_0\varphi(0,0) + D_0\varphi(h_1,0) + D_0\varphi(2h_1,0) + \quad \ldots$$

$$+ D_0\varphi((N_1-1)h_1,0) + C_0 D_0\varphi(1,0) +$$

$$+ C_0 D_1\varphi(0,h_2) + D_1\varphi(h_1,h_2) + D_1\varphi(2h_1,h_2) + \ldots$$

$$+ D_1\varphi((N_1-1)h_1,h_2) + C_0 D_1\varphi(1,h_2) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots \quad + D_1\varphi((N_1-1)h_1,(N_2-1)h_2) + C_0 D_1\varphi(1,(N_2-1)h_2) +$$

$$+ C_0 D_0\varphi(0,1) + \mathrm{D}_0\varphi(h_1,1) + D_1\varphi(2h_1,1) + \ldots$$

$$\ldots \quad + D_0\varphi((N_1-1)h_1,1) + C_0 D_0\varphi(1,1).$$

Таким образом, построенные в работе кубатурные формулы с различными запасами гладкости подынтегральных функций из-за принадлежности анизотропному пространству, порождают и различные потенциальные возможности развития и применения квадратурного или кубатурного процесса в прикладных исследованиях. Их качество проверено на контрольных задачах с известными решениями. Результаты исследования были доложены на международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», посвящённой 70-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова (г. Улан-Удэ — оз. Байкал, 20–27 июня 2015 г.).

Ниже для сравнения приведены приближённые значения некоторых тестовых интегралов и значения, полученные с помощью серии построенных формул (табл.).

Таблица 1

Тестируемый интеграл	**Приближённое значение интеграла (аналитическое)**	**Значение интеграла, полученное с помощью кубатурной формулы**
$\int_0^1\int_0^1 \cos x\, y^2 dxdy$	0,28049 03282 6	0,28049 23845
$\int_0^1\int_0^1 x \exp(y^2) dxdy$	0,7313258729 3590	0,73132 62502 90227
$\int_0^1\int_0^1 x^3\, y^2 dxdy$	0,8(3)	0,83333 33337 5(0)
$\int_0^1\int_0^1 x^3 \cos 10 y^4 dxdy$	0,11474 47866 46529	0,11476 01982 23153
$\int_0^1\int_0^1 x \sin 10\pi\, y^2 dxdy$	0,47970 94404 30739	0,47949 94711 67358
$\int_0^1\int_0^1 \cos 10x^2 \exp(y^3)\, dxdy$	0,23239 51887 37434	0,23241 51838 02369
$\int_0^1\int_0^1 (\cos 10x^2 + \exp(y^3))dxd$	1,51508 75341 69638	1,51510 24848 69615
$\int_0^1\int_0^1 x^2 \cos(y^3)\, dxdy$	1,26503 77739 24878	1,26503 79371 20838

Список литературы

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977. 456 с.
3. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
4. *Юмова Ц. Ж.* Вычисление параметров функционалов погрешностей кубатурных формул с пограничным слоем в неизотропном пространстве: дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. Улан-Удэ, 2006. 127 с.

* * *

Yumova Tsyrenkhanda Zh., Yumov Igor B.

CONSTRUCTION OF SERIES OF LATTICE CUBATURE FORMULAS WITH REGULAR BOUNDARY LAYER IN ANISOTROPIC SPACE

(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude)

Based on the functional-analytical method of the theory of cubature formulas [3] it were constructed the elementary functional errors on the plane with the nodes that lie within or on the boundary of an arbitrary smooth area. There were built a series of lattice cubature formulas with regular boundary layer, optimal from the coefficients. They had fulfilled the requirements of the harmonization of the convergence with the lattice spacing and the smoothness of the function along the selected coordinate directions. This allowed on the elementary errors functional replace some nodes of lattice on the other ones, to minimize the norm of the functional and thereby improve the quality of the formulas. On the nodes of the lattices of these formulas were determined coefficients that account the differential nature of the integrand. The calculated coefficients improve the quality of optimal cubature formulas in anisotropic Sobolev spaces. The results obtained by the methods tested for control problems with known solutions.

Keywords: optimal cubature formulas, functional Sobolev spaces, regular boundary layer.

References

1. Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skiy S. M. *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* (Integral representations of functions and embedding theorems), Moscow, Nauka Publ., 1975. 480 p.
2. Nikol'skiy S. M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* (Approximation of functions of several variables and embedding theorems), 2nd ed., Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
3. Sobolev S. L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* (Introduction to the theory of cubature formulas), Moscow, Nauka Publ., 1974. 808 p.
4. Yumova Ts.Zh. // Dis…Cand.phis.- Math. Sciences (01.01.07) / East- Sib. State Techn. University, Ulan-Ude, 2006. 127 p., (Russian).
5. 4. Yumova Ts. Zh. Vychislenie parametrov funktsionalov pogreshnostey kubaturnykh formul s pogranichnym sloem v neizotropnom prostranstve (The calculation of the parameters of functional errors of cubature formules with boundary layer in the anisotropic space): dissertation for the degree of physical and mathematical sciences: 01.01.07. Ulan-Ude, 2006. 127 p.

* * *