УДК 532.516

А. П. Корнилков

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ТРУБАМ С УПРУГО-ЭЛАСТИЧНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассмотрена специфика решения гидродинамических задач применительно к трубам с эластичным характером стенки. Приведена линеаризованная система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в трубе, которая позволяет установить появление радиальной составляющей колебаний стенки, при движении пульсовой волны по трубе. Показано, что с ее использованием можно осуществить регистрацию всех возможных отклонений исходного режима движения жидкости, вызванных различного рода отклонениями.

Ключевые слова: *Вязкая жидкость, эластичная стенка, уравнение Новье—Стокса.*

Aleksey P. Kornilkov. FOR VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOW THROUGH PIPES WITH ELASTIC-ELASTIC WALLS (Far Eastern State Academy for Social and Humanity Studies).

Specifics of the decision of hydrodynamic tasks with reference to pipes with elastic character of a wall is considered. The linearized system of the equations of movement of viscous incompressible liquid is given in a pipe which allows to establish emergence of a radial component of fluctuations of a wall, at movement of a pulse wave on a pipe. It is shown that with its use it is possible to carry out registration of all possible deviations of an initial mode of movement of the liquid, caused by different deviations.

Keywords: *Viscous liquid, elastic wall, Nov'e—Stokes equation.*

Большая часть "классических" технических задач течения жидкости по трубам базируются на утверждении о том, что стенка трубки абсолютно жёсткая. Однако при решении огромного числа практических задач это условие не выполняется, и становится необходимым учитывать эластичный характер стенки трубки.

При движении жидкости по трубе с упругим характером стенки большое практическое значение имеет учет появляющейся радиальной составляющей скорости Vr, вследствие чего появляется возможность регистрации различных отклонений исходного режима движения жидкости.

В гидродинамике течение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, которые в совокупности с уравнениями неразрывности, состояния и теплопроводности образуют замкнутую систему [4; 5]. Однако её решение в общем виде сопряжено с практически непреодолимыми математическими сложностями, главным образом за счет нелинейности уравнений. Тем не менее, эти сложности могут быть преодолены, если речь идет о решении конкретных практических задач.

Для упрощения классических уравнений, приведённых в работах [4—6] необходимо сформулировать ряд условий:

– течение жидкости является осесимметричным, то есть каждое осевое сечение остается круговым в течении всего времени движения стенок сосуда. Радиус трубки R является функцией времени t и осевой координаты z;

– стенка сосуда перемещается только вдоль радиального направления;

– трубка растягивается и сжимается вдоль оси цилиндра, которая фиксирована во времени;

– предполагается, что давление постоянно на каждом сечении.

Будем использовать цилиндрическую систему координат [7]

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \cdot \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right) \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_x \cdot \frac{\partial U_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{4}{3} \cdot \frac{U_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) \right], \quad (2)$$

где U_x и U_r — проекции скорости движения жидкости на оси x и r;

x — осевая координата;

r — радиальная координата;

φ — угловая координата предполагается равной нулю при отсутстви- закручивания потока;

ρ — плотность жидкости;

ν — кинематическая вязкость жидкости;

P — давление.

Представленные уравнения (1) и (2) — линеаризованный вариант уравнений Навье—Стокса по координатам x и r.

Дальнейшие упрощения, позволяют принять вязкость среды постоянной, можно сразу перейти к уравнению неразрывности, которое в той же системе цилиндрических координат примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}+\rho\cdot\frac{U_r}{r}+\rho\cdot\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_r\cdot\frac{\partial\rho}{\partial r}+U_x\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}=0\,. \tag{3}$$

Дальнейшее упрощение уравнений (1)—(3) основано на пренебрежении членами высоких порядков. В итоге имеем [12]

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+2\cdot\frac{\tau_{\text{он}}}{\rho_0 r_0}\,,$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t}=E_{\text{пр}}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\,, \tag{4}$$

где P — осредненное давление по сечению трубки;

$V=Q/\pi r_0^2$ — средняя скорость в сечении трубки радиуса r_0 при заданном расходе среды Q;

$E_{\text{пр}}$ — приведенный модуль упругости стенки трубки;

$\tau_{\text{он}}=-\rho_0\cdot\nu\left(\frac{\partial U_x}{\partial r}\right)_{|r=r_0}$ — нестационарное касательное напряжение на внутренней поверхности стенки, а $\frac{\partial U_x}{\partial r}\Big|_{r=r_0}$ — градиент скорости на стенке сосуда радиуса r_0.

В наибольшей степени определяют режим движения среды в трубке последние два параметра, входящие в систему уравнений (4)

Для определения параметра $E_{\text{пр}}$ используются приведённые в работах [1], соотношения

$$c=\frac{c_0}{\sqrt{1+\frac{2r_0}{\delta E'\beta_0}}}\,, \tag{5}$$

где c_0 — скорость звука в неограниченной среде заданных свойств;

c — скорость звука в волноводе с упругими стенками;

$E'=\frac{E}{1-\nu_{\text{п}}^2}$ — модуль упругости материала стенки;

$\nu_{\text{п}}$ — коэффициент Пуассона;

β_0 — сжимаемость среды в трубке;

δ — толщина стенки.

Учитывая, что $c_0 = \sqrt{\dfrac{1}{\rho_0\beta_0}}$, имеем $\left(\dfrac{c_0}{c}\right)^2 = 1 + \dfrac{2r_0}{\delta E'\beta_0}$ и далее

$$E_{\text{пр}} = \frac{E}{1 + \dfrac{2r_0}{\delta E'\beta_0}}. \tag{6}$$

Оценивая второй параметр базовой системы (4), а именно $\tau_{\text{он}}$, отметим, что его можно принять равным τ при установившемся режиме движения среды, если следовать гипотезе квазистационарности [6]. В соответствии с этой гипотезой при малых частотах распределение скоростей остается таким же, как и при установившемся движении. В этой связи речь идет об осреднении по периметру касательных напряжений на внутренней стенке волновода, тогда

$$\tau_{\text{он}} = \tau = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho_0 \cdot V^2, \tag{7}$$

где λ — коэффициент гидравлического сопротивления в формуле Дарси—ейсбаха, который можно определить по двум главным параметрам: шероховатости стенки трубки и числу Рейнольдса Re.

С учетом сказанного, приводим систему уравнений (4) к ее базовому виду, более удобному для дальнейшего практического использования:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + A \cdot V,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{E_{\text{пр}}} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{8}$$

где $A = \dfrac{\lambda\rho_0 V}{4r_0}$ — осредненный по сечению диссипативный параметр потерь энергии движения среды в волноводе на трение;

Линеаризованная система уравнений (8) может быть использована для анализа режима движения жидкости в трубках любого типа, причем данная система уравнений позволяет моделировать различные возможные отклонения от номинального режима путем изменения значений входящих в нее параметров.

Литература

1. Заремба Н. П., Шлык Ю. К., Кузнецов В. А. Специфика развития волнового процесса в трубопроводе с упругими стенками // Изв. вузов. «Нефть и Газ» ТюмГНГУ. 2006. № 3. С. 61—66.

2. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

3. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий: справочник: В 2 кн. / Под. ред. д.т.н., проф. В. В. Клюева. Кн. 2. М.: Машиностроение, 1976. 328 с.

4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

5. Джеймсон Э. Мюллер Т. и др. Численные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1981. 408 с.

6. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.

7. Попов Д. Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М.: Машиностроение, 1976. 424 с.

8. Бегун П. И., Афонин П. Н. Моделирование в биомеханике. М.: Высш. шк., 2004. 390 с.

9. Биофизические характеристики тканей человека: Справ. / Березовский В. А., Колотилов Н. Н.; Отв. ред. и авт. предисл. П. Г. Костюк. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.

10. Ольсон Г. Динамические аналогии. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 224 с.