ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 512.24

А. П. Горюшкин

ОБ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНДЕКСА ПО ДВОЙНОМУ МОДУЛЮ В СВОБОДНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГРУПП

Устанавливается, что для свободно разложимой группы проблема вычисления индекса по двойному модулю равносильна проблеме вхождения.

Ключевые слова: группа, подгруппа, разложение по двойному модулю, свободное произведение, алгоритмическая проблема, разрешимость, проблема вхождения, проблема индекса, проблема двойного индекса

Проблема вхождения для конечно определённой группы G состоит в отыскании или доказательстве невозможности алгоритма, который по любому конечному множеству элементов h_i (i = 1, 2, …, m) и элементу w узнавал бы, принадлежит или нет элемент w подгруппе H = гр ($h_1, h_2, \ldots, h_m$), порождённой элементами h_i.

Проблема индекса для конечно определённой группы G состоит в отыскании алгоритма, который по любому конечному множеству элементов h_i (i = 1, 2, …, m) группы G узнавал бы, конечный или бесконечный индекс в G имеет подгруппа H = гр ($h_1, h_2, \ldots, h_m$), порождённая этим множеством. Заметим, что если известно, что индекс конечный, то его точное значение можно найти по единому алгоритму.

Установлено, что для некоторых, достаточно больших классов групп эти две алгоритмические проблемы разрешимы или неразрешимы одновременно [1—3]. В частности, в [2] доказано, что для группы, разложимой в свободное произведение, проблема индекса равносильна проблеме вхождения.

Если G — произвольная группа, H, P — её подгруппы и g — элемент из G, то комплекс $HxP = \{pgp \mid h\in H,\ p\in P\}$ называют *двойным смежным клас-*

Горюшкин Александр Петрович — кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и физики (Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский); e-mail: as2021@mail.ru.

сом. Группа G распадается на непересекающиеся двойные смежные классы; это называется *разложением* G по двойному модулю (H, P). Мощность фактор-множества $\{HxP \mid x \in G\}$ двойных смежных классов в разложении группы G по mod (H, P) называют *двойным индексом* (H, P) в группе G и обозначают символом $[G : (H, P)]$. Двойной индекс является обобщением простого индекса: если E — единичная подгруппа, то $[G : (H, E)] = [G : H]$. Таким образом, разложение группы по двойному модулю является естественным обобщением разложения группы по подгруппе.

Разложение по двойному модулю играет особую роль для свободных произведений. Формулировка и доказательство теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения существенно используют свойства двойных смежных классов.

Частным случаем свободного произведения являются свободные группы: исследованию двойных смежных классов в свободных группах посвящены работы [5] и [6].

Проблема двойного индекса для конечно определённой группы G состоит в отыскании алгоритма, который по любым конечным множествам элементов $\{h_\alpha\}$ и $\{p_\beta\}$ группы G узнавал бы, конечен или бесконечен индекс $[G : (\text{гр}\ (h_\alpha), \text{гр}\ (p_\beta))]$.

В предлагаемой работе устанавливается, что в группе, разложимой в свободное произведение, проблема двойного индекса равносильна проблеме вхождения.

Доказательство этого утверждения для двойного модуля (H, P) зависит от того, является или нет вторая группа в модуле свободным множителем группы. Поэтому рассмотрим сначала частный случай, когда вторая группа в модуле — свободный множитель группы $G = A * B$. Будем считать далее, что свободное произведение нетривиально, т. е. каждая из групп A и B содержит не менее двух элементов.

Теорема 1. В группе $G = A * B$ проблема индекса для двойного модуля (H, P), где P – свободный множитель группы G, а H – произвольная конечно порождённая подгруппа из G, равносильна проблеме вхождения.

Доказательство. Пусть для определённости $P = A$. В свободно разложимой группе проблема индекса и проблема вхождения равносильны, и, таким образом, требуется показать, что наличие алгоритма для вычисления индекса подгруппы H позволяет вычислить и двойной индекс $[G : (H, A)]$ и, наоборот, зная двойной индекс, можно вычислить и обычный индекс.

Двойной смежный класс HxP является объединением некоторого множества левых смежных классов по H. Поэтому если индекс H группе G конечен, то конечен и двойной индекс $[G : (H, A)]$.

Пусть индекс $[G : H]$ бесконечен. Покажем, что тогда и двойной индекс $[G : (H, A)]$ тоже бесконечен. Доказательство проведём методом от противного, т. е. предположим, что $[G : (H, A)] = m$, где мощность m — конечное число:

$$G = Hg_1A + Hg_2A + \ldots + Hg_mA.$$

Разложим группу G и по двойному модулю (H, B):

$$G = Hu_1B + Hu_2B + \ldots + Hu_kB,$$

где $k = [G : (H, B)]$. Мощность k может оказаться конечной или бесконечной. Покажем теперь, что каждое из двух утверждений: «мощность k — конечна» и «мощность k — бесконечна» — приводит к противоречию.

В представлении Куроша подгруппы H из свободного произведения участвуют так называемые функции Маклейна — представители смежных классах по модулю (H, A) и представители по модулю (H, B) с особыми свойствами (см., например, [7]). Выберем в качестве представителей двойных смежных классов g_i, p_j значения маклейновских функций s_A (HgA) и s_B (HgB), соответственно, положим при этом $g_1 = p_1 = 1$. По свойству маклейновских представителей все $g_2, g_3, \ldots, g_m$ оканчиваются только на B-слоги, а $p_2, p_3, \ldots, p_k$ заканчиваются только на A-слоги.

Теперь построим полную систему представителей смежных классов для правостороннего разложения группы G по подгруппе H. Сделаем это двумя способами. Сначала будем использовать разложение G по модулю (H, A), а потом воспользуемся разложением по модулю (H, B). Разложим группу A по подгруппе $g_i^{-1}Hg_i \cap A$. Пусть множество $\{a_{i\alpha}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, элементов из A является полной системой представителей этого разложения. Представителем $g_i^{-1}Hg_i \cap A$ для всех g_i будем считать единицу.

Тогда множество

$$V = \bigcup_i \{g_i a_{i\alpha}\}$$

является полной системой представителей правых смежных классов $G \bmod H$.

Аналогично, множества $\{b_{j\beta}\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ образуют полную систему разложения группы B по mod ($p_i^{-1}Hp_i \cap B$), причём единица принадлежит каждому из этих множеств.

Множество

$$W = \bigcup_{\mathrm{j}} \{g_j a_{j\beta}\}$$

также является полной системой представителей правых смежных классов $G \bmod H$. Следовательно, мощности множеств V и W совпадают и равны $[G : H]$. В множестве V все элементы, кроме $g_2, g_3, \ldots, g_m$, оканчиваются на A-слоги. Если k конечно, то для некоторого j из $\{1, 2, .., k\}$ множество $\{b_{j\beta}\}$ бесконечно и $W_1 = \{p_j b_{j\beta}\}$ — бесконечное подмножество из W, и каждый элемент из W_1 оканчивается на B-слог.

Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ — элементы из W, сравнимые по mod H с элементами $g_2, g_3, \ldots, g_m$. Тогда множество $R = W_1 \setminus \{w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}\}$ состоит из представителей двухконцевых правых смежных классов по подгруппе H, так как каждый элемент v из V, сравнимый по mod H с элементом из R, оканчивается на A-слог. Существование такого множества противоречит конечной порождённости подгруппы H (Б. Баумслаг ([4]). Это значит, что число k конечным быть не может.

Пусть k – бесконечно. Подгруппа H – конечно порождена, а это значит, что лишь для конечного числа элементов p_j подгруппы $p_i^{-1}Hp_i \cap B$ отличны от единичной подгруппы. Следовательно, существует бесконечное множество $P \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ такое, что для каждого p_j из P пересечение $p_i^{-1}Hp_i \cap B = E$. Но для каждого такого p_j индекс $p_i^{-1}Hp_i \cap B$ в группе B больше единицы. Поэтому для каждого p_j из P множество $\{b_{j\beta}\}$ состоит более чем из одного элемента. Но тогда множество $W_2 = \{p_j b_{j\beta} \mid p_j \in P\}$ бесконечно, и все его элементы оканчиваются на B-слоги. Существование такого множества снова противоречит конечной порождённости подгруппы H.

Из теоремы 1 следует, что если G — нетривиальное свободное произведение $A * B$ и H — конечно порождённая подгруппа в G, то оба индекса $[G : (H, A)]$ и $[G : (H, B)]$ конечны или бесконечны одновременно.

Теорема 2. В нетривиальном свободном произведении $G = A * B$ проблема двойного индекса равносильна проблеме вхождения.

Доказательство. Пусть H и P две конечно порождённые подгруппы из нетривиального свободного произведения $G = A * B$, и ни одна из этих подгрупп не является свободным множителем в G.

Если хотя бы одна из этих подгрупп имеет конечный индекс в группе G, то и двойной индекс $[G : (H, P)]$ тоже конечен. Покажем, что если H и P обе имеют бесконечный индекс в G, то бесконечен и индекс $[G : (H, P)]$.

Заметим сначала, что внутренний автоморфизм сохраняет значение двойного индекса:

$$[G : (H, P)] = [G : (H^g, P^g)]$$

для любого элемента g из G.

Далее рассмотрим два случая в зависимости от порядков множителей. Пусть один из множителей, скажем, A является бесконечной группой. Тогда найдётся такой элемент g из G, что все элементы из H^g и из P^g оканчиваются только на B-слоги. Но это значит, что все элементы из A попарно несравнимы по mod (H^g, P^g). Действительно, пусть a_1, a_2 принадлежат A, и p из $P^{g\cdot}$, и h из H^g. Так как неединичные элементы из $P^{g\cdot}$ и H^g начинаются и оканчиваются на B-слоги, из равенства $a_1 p a_2^{-1} h = 1$следует $p = h = a_1 a_2^{-1} = 1$.

Иначе говоря, если $a_1 \neq a_2$, то элементы a_1, a_2 не сравнимы по модулю (H^g, P^g), и поэтому из бесконечности группы A следует бесконечность индекса $[G : (H^g, P^g)]$.

Пусть теперь группа G — свободное произведение $A * B$ конечных групп A и B. Если G — диэдральная группа, то H и P — конечные группы и утверждение теоремы 2 верно. Поэтому можно считать, что порядок хотя бы одного из множителей A, B больше двух. Пусть $K = [A, B]$ — взаимный коммутант подгрупп A и B. Группа K — свободная и нециклическая. Рассмотрим пересечения подгруппы K с подгруппами H и P, пусть $R = K \cap H$, $Q = K \cap P$. Подгруппы R, Q являются конечно порождёнными подгруппами бесконечного индекса в K. Поскольку K — свободная группа ранга, большего единицы, мы оказываемся в условиях рассмотренного уже случая, и, следовательно, индекс (R, Q) в K бесконечен. С другой стороны, индекс R в H и индекс Q в P конечны. Рассмотрим правостороннее разложение $H \bmod R$ и левостороннее разложение $P \bmod Q$:

$$H = Rr_1 + Rr_2 + \ldots + Rr_m;$$
$$P = q_1Q + q_2Q + \ldots + q_nQ.$$

Двойной смежный класс HgP является объединением конечного числа двойных смежных классов по mod (R, Q) вида Rr_igq_jQ, $i = 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому из конечности $[G : (H, P)]$ следует конечность $[G: (R, Q)]$. Но из того, что $[G: (R, Q)] \geq [K: (R, Q)]$, а число $[K: (R, Q)]$ бесконечно, получаем бесконечность индекса (H, P) в G.

Следовательно, для свободных произведений проблема двойного индекса равносильна проблеме обычного индекса, которая, в свою очередь, равносильна проблеме вхождения.

В заключение отметим, что до сих пор неизвестно, является ли разрешимость проблемы индекса в свободных множителях необходимым и достаточным условием для разрешимости этой проблемы в свободном произведении. В представлении Куроша-Маклейна для подгруппы из свободного произведения участвуют представители двойных смежных классов, и поэтому более естественным представляется сформулировать такую задачу для двойного индекса: верно ли, что в группе $A*B$ разрешима проблема двойного индекса тогда и только тогда, когда эта проблема разрешима в группах A и B?

Список литературы

1. *Горюшкин А. П.* Нахождение индекса подгруппы и проблема вхождения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 1(12). С. 15-25.
2. *Горюшкин А. П.* О нахождении индекса подгруппы в свободном произведении // Наука, образование, инновации: пути развития: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции, 24—26 мая 2016 г. Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2016. С. 31—35.

3. *Горюшкин А. П.* Об алгоритме для вычисления индекса подгруппы в группе, разложимой в прямое произведение // Вестник Приамурского гос. ун-та им. Шолом-Алейхема, 2016. № 1(22). С. 93—99.
4. *Baumslag B*. Free groups and free products — some aping theorems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1967. Vol. 20. No. 4. P. 635—645.
5. *Frenkel E., Remeslennikov V. N.* Double cosets in free groups // International Journal of Algebra and Computation. 2013. Vol. 23. No. 5. P. 1225—1241.
6. *Gitik R., Rips E.* On double cosets in free groups // arXiv preprint arXiv:1306.0033. 2013. URL: https://arxiv.org/abs/1306.0033v1
7. *MacLane S*. A proof of the subgroup theorem for free products // Mathematika. 1958. No. 5. P. 13—19.

* * *

Goryushkin Alexander P.

ON THE ALGORITHM FOR FINDING THE INDEX ON DOUBLE MODULE IN A FREE PRODUCT OF GROUPS

(Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk Kamchatskiy)

It is established that for a freely decomposable group the problem of finding the index on double module is equivalent to the occurrence problem.

Keywords: group, subgroup, double module decomposition, free product, algorithmic problem, solvability, occurrence problem, index problem, double index problem.

References

1. Goryushkin A. P. Finding the index of a subgroup and the occurrence problem [Nakhogdenie indeksa podgruppi i pronlema vchogdeniya], *Herald KRAUNC, Fiz.-mat. Nauki*, 2016, № 1(12), pp. 12—55.
2. Goryushkin A. P. On finding subgroup index in free product [O nachogdenii indeksa podgruppi v svobodnom proizvedenii], *Nauka, obrazovanie, innovaczii: puti razvitiya, Material Sedmoy vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy rjnfereczii, 24-26 maya 2016 g*. (Science, education, innovations: ways of development: materials of the VII All-Russian Scientific and Practical Conference, May 24—26, 2016), Petropavlovsk-Kamchatskiy, 2016, pp. 31—35.
3. Goryushkin A. P. On an algorithm for calculating subgroup index in a group which can be decompose into a direct product [Ob algoritme dlya vichisleniya indeksa podruppi v gruppe, razlogimoy v pryamoe prozvedenie], *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleihema*, 2016, no. 1(22), pp. 93—99.
4. Baumslag B. Free groups and free products — some aping theorems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1967, vol. 20, no. 4, pp. 635—645.
5. Frenkel E., Remeslennikov V. N. Double cosets in free groups, *International Journal of Algebra and Computation*, 2013, vol. 23, no. 5, pp. 1225—1241.
6. Gitik R., Rips E. On double cosets in free groups, *arXiv preprint arXiv:1306.0033*. 2013. Available at: https://arxiv.org/abs/1306.0033v1
7. *MacLane S*. A proof of the subgroup theorem for free products // Mathematika. 1958. No. 5. P. 13—19.

* * *