

УДК 532.533

**С. В. Соловьев, Л. С. Гринкруг**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ

*В работе представлены результаты конвективного теплообмена в жидком ядре Земли при наличии внутренних источников тепла. Для температуры рассматривались граничные условия I, II, III рода. Исследовано влияние внутренних источников теплоты на гидродинамику и теплообмен в жидком ядре Земли. Рассчитаны критические числа Релея.*

**Ключевые слова:** конвективный теплообмен, жидкое ядро Земли, гидродинамика, числа Рэлея.

**Sergey V. Soloviev, Lev S. Grinkrug. CONVECTION MODELING IN EARTH'S LIQUID CORE (Pacific State University, Far Eastern State Academy for Social and Humanity Studies).**

*In work the results convective heat transfer in a liquid core of the Earth are submitted at presence of internal sources of heat. For temperature the boundary conditions I, II, III sorts were considered. The influence of internal sources of heat on hydrodynamics and heat transfer in a liquid core of the Earth is investigated. The critical Reynolds numbers are designed.*

**Keywords:** convective heat transfer, fluid core of the Earth, hydrodynamics, Rayleigh number.

### **Введение**

Современная теория геомагнитного поля предполагает, что в жидком ядре Земли происходит непрерывное перемещение вещества [1]. В настоящее время не вызывает сомнений, что тепловая или гравитационная конвекция в земном ядре является именно той причиной, которая приводит к созданию геомагнитного поля [2]. Теория геомагнитного поля получила название гидромагнитного динамо (ГД) по аналогии с действием обычной динамо-машины с самовозбуждением. Математическая трактовка теории вихревого движения в ядре и возникновения в нем индукционных токов чрезвычайно затруднена и в общем виде до сих пор не получила своего решения [1], так как решение уравнений магнитной гидродинамики сопряжено с большими трудностями. Поэтому теория ГД, в основном, развивается путем

исследования кинематических моделей, в которых скорость движения жидкости считается заданной, а определяется только магнитное поле [3].

Согласно этой концепции такой подход можно сравнить с электродинамикой слабых полей, которая ограничивается случаем заданных гидродинамических скоростей и не учитывает влияния электромагнитных полей на движение [3]. В этой связи исследование гидродинамики жидкого ядра Земли при конвективном теплообмене без учета магнитных сил представляет самостоятельный интерес, который в дальнейшем позволит оценить влияние магнитного поля на гидродинамику и обратно при решении системы уравнений магнитной гидродинамики (уравнения Навье-Стокса, энергии и магнитной индукции).

С учетом сказанного в работе рассматривается конвективный теплообмен с учетом внутренних источников в жидком ядре Земли, которое считается неэлектропроводной ньютоновской жидкостью. Используется приближение Буссинеска. Ускорение свободного падения направлено к центру ядра. Жидкое ядро рассматривается как сферический слой, заключенный между внутренним твердым ядром Земли и граничной зоной мантии с жидким ядром [4].

### 1 Математическая постановка задачи

Математическая модель в сферической системе координат с учетом симметрии по долготе описывается следующими безразмерными уравнениями:

$$\frac{1}{\text{Ro}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta \vartheta + \frac{Q_v}{\text{Pe}}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\text{Ro}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\text{Eu} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} + \gamma \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta; \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Для температуры рассматривались граничные условия I, II и III рода.

Граничные условия I рода:

$$\vartheta|_{r_1} = 1; \quad \vartheta|_{r_2} = 0. \quad \vartheta = (T - T_2)/(T_1 - T_2);$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_1 - T_2)r_1^3}{\nu^2}; \quad Q_v = \frac{q_v r_1^2}{\lambda(T_1 - T_2)},$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности вещества ядра Земли;  $q_v$  – внутренний источник теплоты.

Граничные условия II рода:

– на внутренней границе ядра задается тепловой поток  $q$  по закону Фурье, а на внешней границе – температура (или наоборот)

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 1; \quad \vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

$$\text{Здесь } \vartheta = (T - T_2) \lambda / (q r_1); \quad Gr = \frac{g \beta q r_1^4}{\nu^2 \lambda}; \quad Q_v = \frac{q_v r_1}{q}.$$

Граничные условия III рода:

– на границах ядра теплообмен осуществляется по закону Ньютона-Рихмана

$$Bi_1 \vartheta \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = Bi_2 (1 - \vartheta \Big|_{\Gamma_2}). \quad Bi_k = \frac{\alpha_k r_1}{\lambda}; k=1,2.$$

$$\vartheta = \frac{T_{x1} - T}{T_{x1} - T_{x2}}; \quad Gr = -\frac{g \beta r_1^3 (T_{x1} - T_{x2})}{\nu^2}; \quad Q_v = -\frac{q_v r_1^2}{\lambda (T_{x1} - T_{x2})}.$$

$T_{x1}, T_{x2}$  – заданные размерные температуры жидкости, которая омывает границу ядра  $\Gamma_1$  (изнутри) и  $\Gamma_2$  (извне) соответственно;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи со стороны жидкости, омывающей границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно.

Следует отметить, что возможна комбинация граничных условий для температуры.

Задача (1)–(3) решалась в переменных температура — вихрь — функция тока:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{No} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) = \\ & = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + Q_v \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{No} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \omega \text{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] = \\ & = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right] - \frac{Gr}{Re^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = -\omega r \sin \theta. \quad (6)$$

Для решения задачи (4)–(6) в качестве начальных условий задавались нулевые значения функции тока, напряженности вихря и температуры, либо стационарное распределение температуры с источником тепла (или без, если он отсутствовал) в случае чистой теплопроводности.

Граничные условия для функции тока следующие:

$$\Psi \Big|_{\Gamma_{1,2}} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{1,2}} = 0; \quad \Psi \Big|_{\theta=0, \pi} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0, \pi} = 0.$$

Граничные условия для напряженности вихря на стенках предполагают линейное изменение  $\omega$  по нормали. Граничное условие для  $\omega$  на оси симметрии взято из работы [5].

Для оценки интенсивности естественной конвекции в жидком ядре Земли рассчитывались локальные и осредненные числа Нуссельта. Локальные и осредненные числа Нуссельта на поверхностях внутренней  $\Gamma_1$  и внешней  $\Gamma_2$  сфер вычислялись по формулам:

– локальные

$$Nu_{in} = - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_1}, \quad Nu_{out} = - \left. \frac{r_2}{r_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right|_{\Gamma_2};$$

– осредненные

$$\overline{Nu}_{in} = \frac{1}{2} \int_0^\pi Nu_{in} \sin \theta d\theta; \quad \overline{Nu}_{out} = \frac{1}{2} \int_0^\pi Nu_{out} \sin \theta d\theta.$$

Тестирование осредненных чисел Нуссельта осуществлялось в режиме чистой теплопроводности, для чего решалось уравнение вида

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\vartheta}{dr} \right) + Q_v = 0 \quad \text{с соответствующими граничными условиями.}$$

Находилась решение  $\vartheta(r)$ , после чего вычислялись осредненные числа Нуссельта. Затем, используя уравнение теплового баланса, были получены соотношения, которым должны были удовлетворять осредненные числа Нуссельта  $\overline{Nu}_{in}$  и  $\overline{Nu}_{out}$ . Эти соотношения приведены ниже:

– граничные условия I рода на обеих границах  $\Gamma_1, \Gamma_2$

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 1; \quad \vartheta|_{\Gamma_2} = 0.$$

$$\frac{\overline{Nu}_{in}}{\overline{Nu}_{out}} = \frac{\frac{Q_v}{3} + \frac{1 - \frac{Q_v}{6} (R_0^2 - 1)}{R_0 - 1} R_0}{\frac{Q_v}{3} R_0^2 + \frac{1 - \frac{Q_v}{6} (R_0^2 - 1)}{R_0 - 1}}, \quad R_0 = r_2/r_1.$$

При  $Q_v = \frac{q_v r_1^2}{\lambda (T_1 - T_2)} = 0 \quad \overline{Nu}_{in} = R_0 \overline{Nu}_{out}.$

– граничные условия II и I рода

$$- \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_{\Gamma_1} = 1; \quad \vartheta|_{\Gamma_2} = 0;$$

$$\overline{Nu}_{in}/\overline{Nu}_{out} = \left[ 1/R_0 - Q_v (1/R_0 - R_0^2)/3 \right]^{-1}.$$

При  $Q_v = q_v r_1 / q = 0 \quad \overline{Nu}_{in} = R_0 \overline{Nu}_{out}.$

– граничные условия I и III рода (смешанные):

$$\vartheta|_{\Gamma_1} = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n}|_{\Gamma_2} = Bi_2(1 - \vartheta|_{\Gamma_2});$$

$$\frac{\overline{Nu}_{in}}{\overline{Nu}_{out}} = \frac{\left[1 + \frac{Q_v}{6} \left(1 - R_\theta^2 - \frac{2R_\theta}{Bi_2}\right)\right] \frac{R_\theta}{R_\theta - 1 + 1/R_\theta Bi_2} + \frac{Q_v}{3}}{\left[1 + \frac{Q_v}{6} \left(1 - R_\theta^2 - \frac{2R_\theta}{Bi_2}\right)\right] \frac{1}{R_\theta - 1 + 1/R_\theta Bi_2} + \frac{Q_v R_\theta^2}{3}}.$$

При  $Q_v = \frac{q_v r_1^2}{\lambda(T_{x1} - T_{x2})} = 0 \quad \overline{Nu}_{in} = R_\theta \overline{Nu}_{out}.$

– граничные условия III и I рода

$$Bi_1 \vartheta|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n}|_{\Gamma_1}; \quad \vartheta|_{\Gamma_2} = 1;$$

$$\frac{\overline{Nu}_{in}}{\overline{Nu}_{out}} = \frac{\left[1 + \frac{Q_v}{6} \left(1 - R_\theta^2 - \frac{2}{Bi_1}\right)\right] \frac{R_\theta}{(1/Bi_1)R_\theta + R_\theta - 1} + \frac{Q_v}{3}}{\left[1 + \frac{Q_v}{6} \left(1 - R_\theta^2 - \frac{2}{Bi_1}\right)\right] \frac{1}{(1/Bi_1)R_\theta + R_\theta - 1} + \frac{Q_v R_\theta^2}{3}}.$$

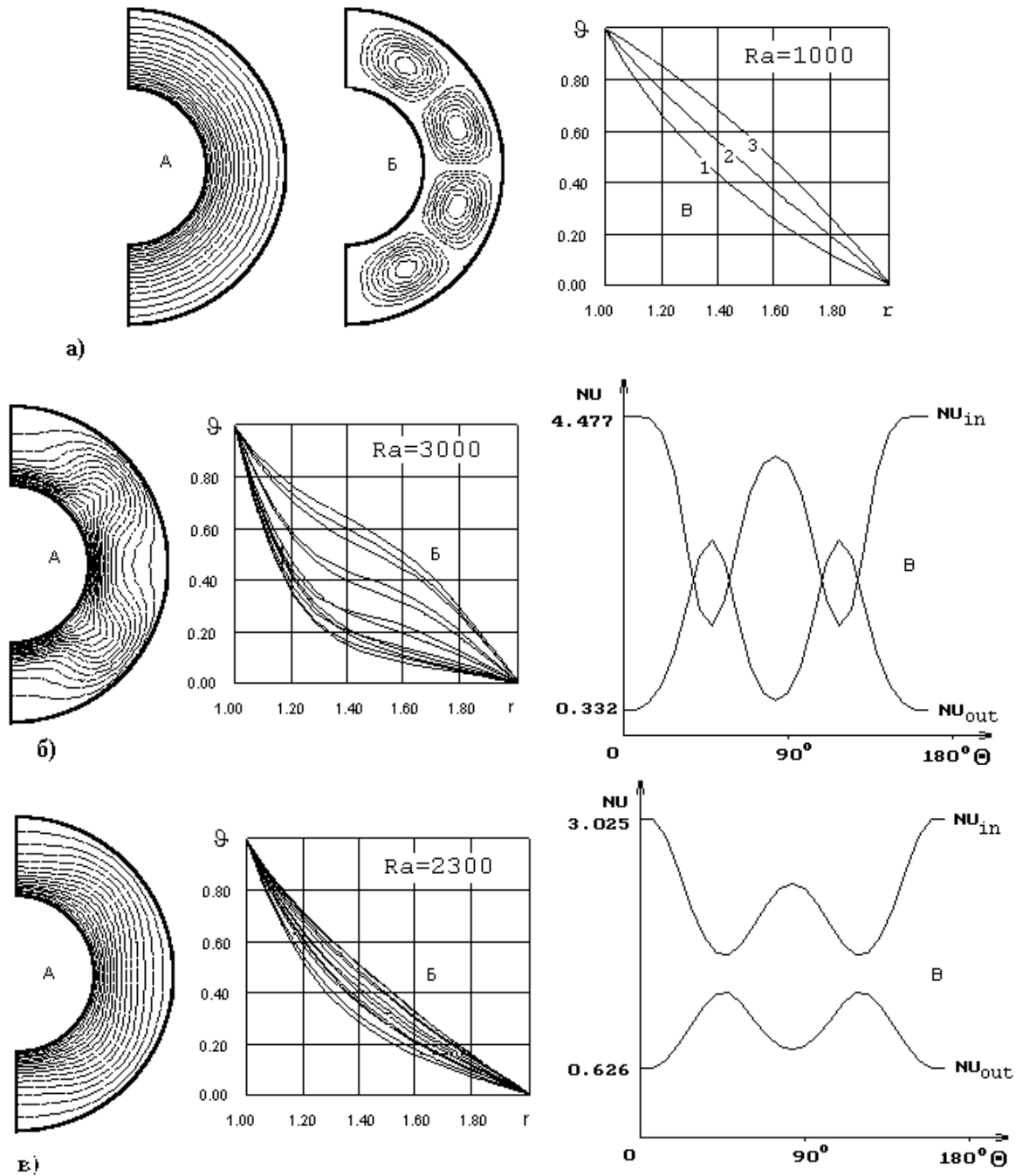
При  $Q_v = \frac{q_v r_1^2}{\lambda(T_{x1} - T_2)} = 0 \quad \overline{Nu}_{in} = R_\theta \overline{Nu}_{out}.$

Система дифференциальных уравнений (4)–(6) решалась численно. В качестве метода решения использовался метод Патанкара [6]. Для решения дискретных аналогов уравнений использовался итерационный метод Гаусса-Зейделя с применением нижней релаксации.

## 2 Результаты расчетов

В результате численного решения задачи были получены поля температуры, функции тока, локальные и осредненные числа Нуссельта. В качестве примера рассматривался установившийся режим:  $Re = Pe = 1$ ;  $Gr/Re^2 = 10^3$  [1,2,4]. Отношение внешнего радиуса ядра  $r_2$  к внутреннему  $r_1$  варьировалось в диапазоне 2/1; 3/1.

Результаты для отношения  $r_2/r_1 = 2/1$  представлены на рис. 1-3. На рис. 1 изображены расчетные поля для температурных граничных условий I рода. Число Релея  $Ra = 1000$ . Теплообмен в ядре осуществляется теплопроводностью (рис. 1,а). Поле температуры для всех трех режимов ( $Q_v/Pe = 0; 1; 2$ ) представляет собой концентрические окружности, сгущающиеся у внутренней границы ядра (рис. 1,а,А для  $Q_v/Pe = 0$ , здесь  $\overline{Nu}_{in} > \overline{Nu}_{out}$ ).



**Рис. 1. Расчетные поля:** а — А — поле температуры; Б — функция тока; В — распределение температуры по толщине ядра;  $Ra = 1000$ ;  $|\Psi_{\max}| = 6,60 \cdot 10^{-15}$ ;  $\overline{Nu}_{in} = 1,979$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,996$ ; б — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границах ядра в зависимости от широты; 3000; 3,29; 2,924; 1,478; в — А, Б- поле и распределение температуры по толщине ядра; В — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 2300; 0,78; 2,096; 1,060

Распределение температуры по толщине ядра представлено кривой 1 на рис. 1,а,В) и сгущающиеся у его внешней границы для значений  $Q_v / Pe = 1$ ; 2. Здесь происходит возрастание чисел Нуссельта на внешней

границе ядра,  $\overline{Nu}_{out} > \overline{Nu}_{in}$ . Изменение температуры по толщине прослойки представлено кривой 2 для  $Q_v / Pe = 1$  и кривой 3 для  $Q_v / Pe = 2$  на рис. 1,а,В. И хотя в ядре для всех режимов имеет место четырехъязычистое течение (рис. 1,а,Б), интенсивность его практически незначительна, максимальное значение функции тока  $|\Psi_{max}|$  порядка  $10^{-14}$ ,  $10^{-15}$ . При значении  $Q_v / Pe = 1$  максимальное значение функции тока  $|\Psi_{max}| = 1,44 \cdot 10^{-14}$ ,  $\overline{Nu}_{in} = 1,323$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 1,829$ , а для  $Q_v / Pe = 2$  максимальное значение функции тока  $|\Psi_{max}| = 2,23 \cdot 10^{-14}$ ,  $\overline{Nu}_{in} = 0,666$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 2,662$ . Для результатов рис. 1,а локальные числа Нуссельта совпадают с осредненными. Последние, полученные при численном решении задачи, с абсолютной погрешностью  $10^{-2}$  удовлетворяют тестовым соотношениям для соответствующих режимов ( $Q_v = 0$  и  $Q_v \neq 0$ ). На рис. 1,б приведены расчетные поля для значения числа Релея  $Ra = 3000$  при отсутствии внутреннего источника тепла. Как видно из рисунка теплообмен для этого режима осуществляется конвекцией.

Поле температуры в слое и ее распределение по толщине прослойки приобретает ярко выраженный для развитой конвекции характер. Интенсивность движения и теплообмена возрастает, о чем свидетельствует увеличение функции тока ( $|\Psi_{max}| = 3,29$ ) и осредненных чисел Нуссельта ( $\overline{Nu}_{in} = 2,924$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 1,478$ ). На внутренней и наружной поверхности ядра образуются тепловые пограничные слои. Изменение локальных чисел Нуссельта носит "волновой характер" с симметрией относительно угла  $\theta = 90^\circ$  (рис. 1,б,В). Значение угла  $\theta = 90^\circ$  соответствует "Южному полюсу", а  $\theta = 180^\circ$  – "Северному полюсу". Картина течения в прослойке та же, что и для рассмотренных выше режимов (рис. 1,а,Б).

Значение критического числа Релея  $Ra^*$  [7], отвечающее области устойчивости может быть численно найдено непосредственно из дифференциальной формулировки задачи. В этой связи с целью нахождения критического числа Релея были проделаны численные расчеты, которые позволили определить  $Ra^* \sim 2000$ .

Можно полагать, что найденное критическое число представляет нижний уровень спектра неустойчивости, определяющий начало конвекции в слое. Известно, что для плоского горизонтального слоя с твердыми границами минимальное критическое число Релея на основном уровне неустойчивости равно  $Ra^* = 1707,762$  [8]. Возможно, различие в значениях критических чисел связано с кривизной рассматриваемой области.

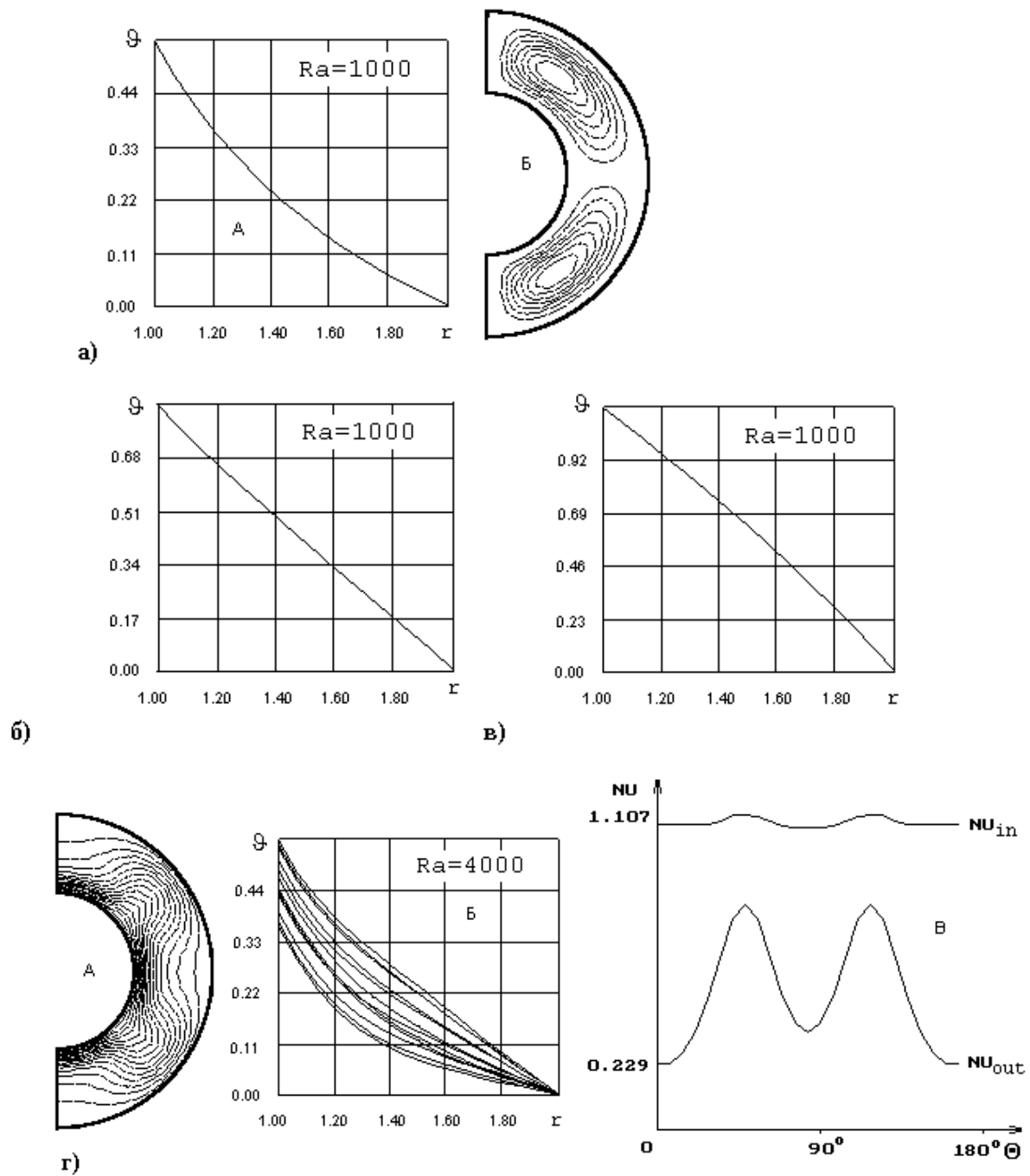
На рис. 1,в приведены результаты расчета для  $Ra = 2300$  свидетель-

ствующие о том, что при  $Ra > Ra^* = 2000$  в слое начинает развиваться конвективный механизм переноса энергии. Поле температуры уже отлично от концентрических окружностей (рис. 1,в,А), по толщине ядра имеет место расслоение температуры (рис. 1,в,Б), изменение локальных чисел Нуссельта носит "волновой" характер, но для данного режима (по сравнению с результатом рис. 1,б,В) кривые  $Nu_{in}$  и  $Nu_{out}$  не пересекаются.

Результаты расчета для случая граничных условий вида  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -1; \quad \vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0$  представлены на рис. 2. Из рисунка видно, что теплообмен осуществляется теплопроводностью, поэтому локальные и осредненные числа Нуссельта совпадают между собой. С увеличением теплового потока, подводимого снизу, температура на внутренней границе ядра возрастает (см. изменение температуры в ядре на рис. 2,а,А; 2,б и 2,в). Поле температуры, как и в случае граничных условий I рода, представляет собой концентрические окружности аналогичные рис. 1,а,А, сгущающиеся у внутренней границы при  $Q_v = 0$  ( $\overline{Nu}_{in} > \overline{Nu}_{out}$ ), а для  $Q_v \neq 0$  ( $\overline{Nu}_{out} > \overline{Nu}_{in}$ ) – у внешней. Интенсивность конвекции незначительна, во всех случаях имеет место двухвихревое течение (рис. 2,а,Б). По сравнению с результатами, приведенными на рис. 1,а,Б, интенсивность конвекции здесь выше  $|\Psi_{max}| \sim 10^{-11}$ . Рассчитанные осредненные числа Нуссельта с абсолютной погрешностью  $10^{-2}$  удовлетворяют тестовым соотношениям. Для данного типа граничных условий и  $Q_v = 0$  численно найдено значение критического числа Релея  $Ra^* \sim 3300$ . Величины осредненных чисел Нуссельта такие же, как и для варианта, представленного на рис. 1,а, интенсивность конвекции  $|\Psi_{max}| \sim 10^{-8}$ , причем течение становится четырехъячейстым, как на рис. 1,а,Б.

На рис. 2,г показаны результаты для  $Q_v = 0$ ;  $Ra = 4000 > Ra^*$ . В ядре преобладает конвективный механизм переноса энергии. Поле температуры отлично от концентрических окружностей (рис. 2,г,А), по толщине ядра имеет место расслоение температуры (рис. 2,г,Б), на границах ядра формируются тепловые пограничные слои. Изменение локальных чисел Нуссельта (особенно на внешней границе) носит "волновой" характер. В слое имеют место четыре вихря с интенсивностью  $|\Psi_{max}| = 1,188$  (так же как на рис. 1,а,Б). Численно рассчитанные осредненные числа Нуссельта превышают соответствующие тестовые значения для режима теплопроводности.





**Рис. 2. Расчетные поля:** а — А -поле температуры; Б — функция тока;  $Ra = 1000$ ;

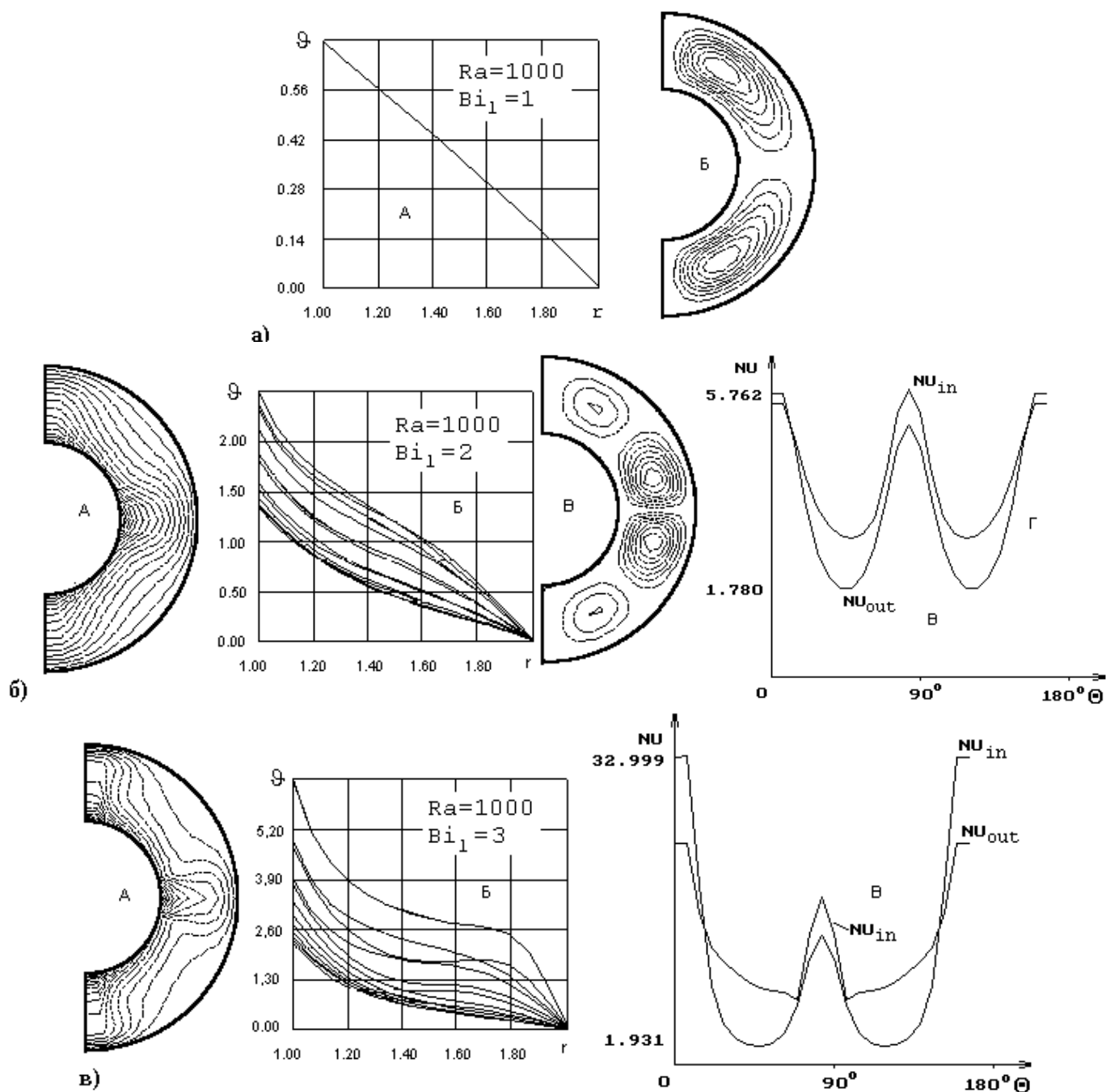
$$Q_v/Pe = 0; |\Psi_{max}| = 3,30 \cdot 10^{-12}; \overline{Nu}_{in} = 1,061; \overline{Nu}_{out} = 0,534;$$

б — распределение температуры по толщине ядра -1000;1; 4,10 $\cdot$ 10 $\cdot$ 12; 1,061; 0,534;

в — распределение температуры по толщине ядра — 1000; 2; 1,43  $\cdot$  10 $\cdot$ 11; 0,994; 2,828;

г — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра;

в — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 4000; 0; 1,188; 1,079; 0,544



**Рис. 3. Расчетные поля:** а — А — распределение температуры по толщине ядра; Б — функция тока;  $|\Psi_{max}| = 2,93 \cdot 10^{-14}$ ;  $\overline{Nu}_{in} = 0,686$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 1,509$ ; б — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — функция тока; Г — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 2,12; 3,762; 3,026; в — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В- распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 4,47; 10,413; 6,378

Результаты, полученные при граничных условиях III рода на внутренней поверхности ядра:

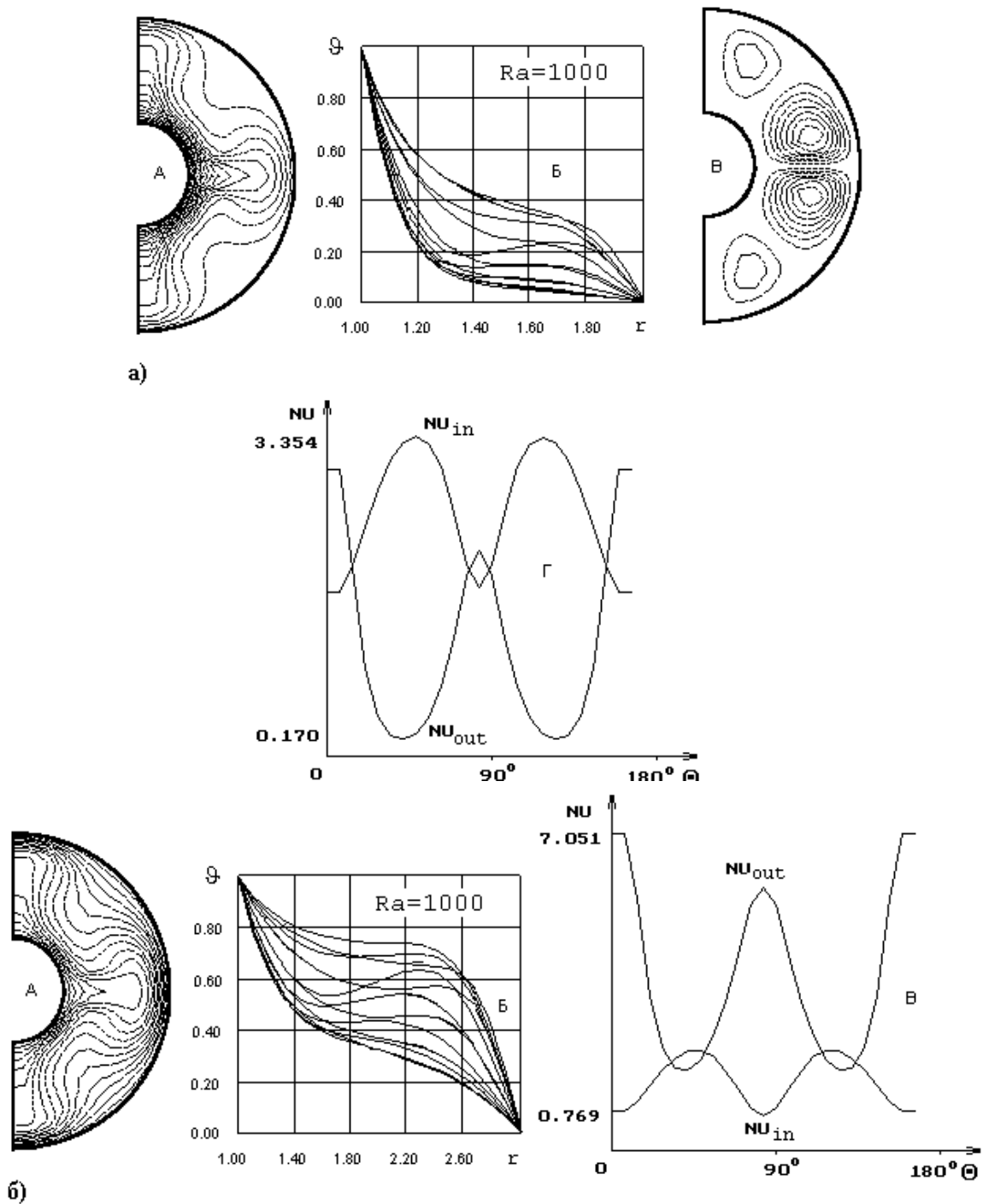
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -\vartheta \Big|_{\Gamma_1} \text{ (рис. 3,а); } \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -2\vartheta \Big|_{\Gamma_1} \text{ (рис. 3,б); } \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -3\vartheta \Big|_{\Gamma_1} \text{ (рис. 3,в),}$$

показаны на рис. 3. На внешней границе ядра температура поддерживалась равной нулю  $\vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0$ . Для всех случаев имели место внутренние источники теплоты ( $Q_v / Pe = 1$ ).

Для результатов рис. 3,а перенос энергии в прослойке осуществляется теплопроводностью. Поле температуры представляет собой концентрические окружности, как на рис. 1,а,А. Распределение температуры по толщине сферической прослойки изображено на рис. 3,а,А. В слое имеют место два вихря малой интенсивности  $|\Psi_{\max}| \sim 10^{-14}$  (рис. 3,а,Б). При увеличении подводимого снизу тепла теплообмен в слое осуществляется конвекцией, происходит перестройка поля температуры (рис. 3,б,А и 3,в,А), особенно заметное в области экватора и полюсов  $\Theta \sim 0; 90; 180^\circ$ . На внутренней поверхности ядра, с ростом числа Био  $Bi_1$ , значение температуры увеличивается, а ее распределение по толщине ядра приобретает вид, характерный для конвективного способа передачи энергии (рис. 3,б,Б и 3,в,Б).

В исследуемой области (рис. 3,б и 3,в) имеет место четырехъязычистое течение (рис. 3,б,В). Для результатов рис. 3,а локальные и осредненные числа Нуссельта совпадают между собой. На рис. 3,б,Г ( $Bi_1 = 2$ ) показано изменение локальных чисел Нуссельта, которое носит "волновой" характер, причем кривые  $Nu_{in}$  и  $Nu_{out}$  различаются незначительно, но еще не пересекаются. Дальнейший рост мощности подводимого изнутри теплового потока ( $Bi_1 = 3$ ; рис. 3,в) увеличивает интенсивность конвекции  $|\Psi_{\max}| \sim 4$ , перестройка поля температуры в прослойке продолжается, что приводит к возрастанию чисел Нуссельта. Кривые  $Nu_{in}$ ,  $Nu_{out}$  (рис. 3,в,В) имеют общие точки, характеризующиеся равенством локальных тепловых потоков. Теплообмен в ядре осуществляется конвекцией.

Результаты для отношения  $r_2 / r_1 = 3/1$  представлены на рис. 4-6. Для граничных условий I рода расчетные поля изображены на рис. 4. Перенос энергии в ядре осуществляется конвекцией, о чем можно судить по характерному для конвективного теплообмена изменению поля и распределению температуры (рис. 4,а,А,Б и 4,б,А,Б). Интенсивность движения и теплоперенос увеличиваются, когда в ядре имеют место внутренние источники: при  $Q_v = 0$   $|\Psi_{\max}| \sim 8$ ; при  $Q_v = 1$   $|\Psi_{\max}| \sim 11$ .



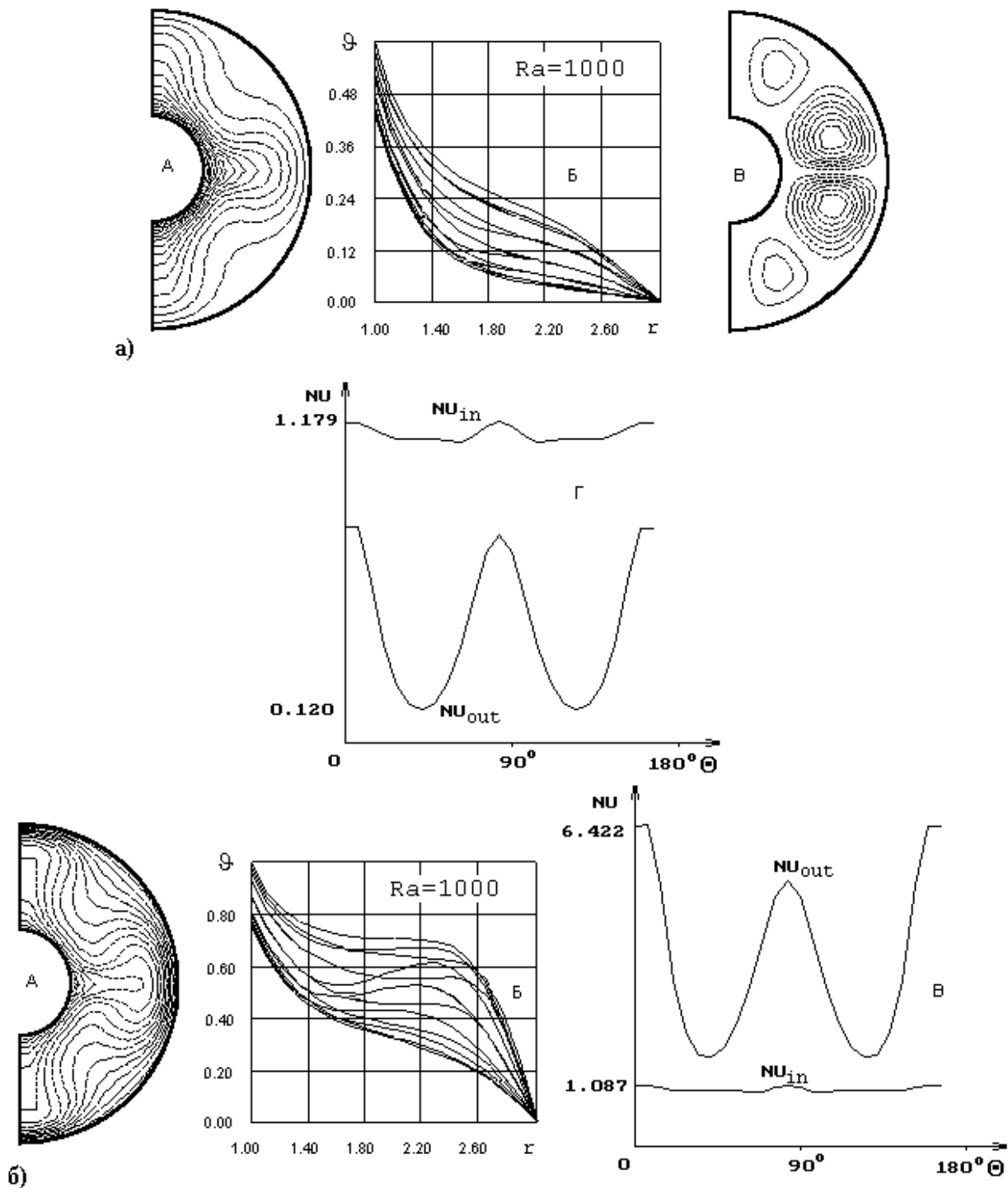
**Рис. 4. Расчетные поля:** а — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — функция тока; Г- распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра;  $Q_v/Pe = 0$ ;  $|\Psi_{max}| = 8,64$ ;  $\overline{Nu}_{in} = 2,740$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,922$ ; б — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 1; 11,22; 1,624; 3,476

Наличие внутренних источников теплоты увеличивает градиенты температуры у внешней границы ядра (рис. 4,б,А) по сравнению с результатом, показанным на рис. 4,а,А ( $Q_v = 0$ ), что приводит к возрастанию чисел Нус-

сельта на внешней поверхности. Расслоение температуры по толщине слоя становится более заметным для  $Q_v = 1$  (рис. 4,б,Б). Изменение чисел Нуссельта носит "волновой" характер (рис. 4,а,Г и 4,б,В). Для рассмотренных режимов имеет место развитое четырехъязычистое течение (рис. 4,а,В), причем в экваториальной области  $\Theta \sim 90^\circ$  вихри более интенсивные, чем в области полюсов  $\Theta \sim 0; 180^\circ$ .

Критическое число Релея для  $Q_v = 0$ , полученное в результате численного эксперимента, составляет величину  $Ra^* \sim 300$ . Поле температуры для этого режима представляет собой концентрические окружности. Всю область течения занимают два вихря малой интенсивности  $|\Psi_{\max}| \sim 10^{-4}$ . Локальные числа Нуссельта совпадают с осредненными, причем  $\overline{Nu}_{in} = 1,465$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,498$ . Расчет Шермана (уточняющий величину нижнего критического числа Релея), приведенный в [8] для частного случая шаровой полости (не прослойки, как в настоящей работе) с идеально проводящей границей, привел к значению критического числа Релея  $Ra^* = 745,9$ . В этой же работе (табл. 7 [8]) приведено критическое число Релея для горизонтального цилиндра с идеально проводящей границей равное  $Ra^* = 408,2$ . В табл. 4 [8] для некоторых вариантов граничных условий (к сожалению ни один не подходит для сравнения с результатами настоящей работы) даны критические значения  $Ra^*$  горизонтального слоя, диапазон изменения которых 120-816,4. В этой связи анализ и сопоставление порядка величин критических чисел Релея  $Ra^*$ , численно рассчитанных в данной работе и приведенных в [8], позволяет судить о достоверности полученных результатов.

Поля температуры, функции тока и локальные числа Нуссельта, рассчитанные для граничных условий вида:  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = -1$ ;  $\vartheta \Big|_{\Gamma_2} = 0$ , приведены на рис. 5. Как и в случае граничных условий I рода, здесь имеет место развитый естественно-конвективный теплообмен с характерным для этого механизма переноса энергии профилем температуры (рис. 5,а,А,Б и 5,б,А,Б). Наличие внутреннего источника теплоты увеличивает расслоение температуры в слое (рис. 5,б,Б) по сравнению с результатом, показанным на рис. 5,а,Б ( $Q_v = 0$ ). Локальные числа Нуссельта (рис. 5,а,Г и 5,б,В) на внутренней границе ядра практически не изменяются, приобретая "волновой" характер на внешней границе. При  $Q_v = 0$  локальный тепловой поток на внутренней границе  $Nu_{in}$  (рис. 5,а,Г) превосходит локальный тепловой поток  $Nu_{out}$  на внешней границе. Картина меняется на противоположную при  $Q_v = 1$  (рис. 5,б,В): уменьшается локальный тепловой поток на внутренней границе и увеличивается на внешней.



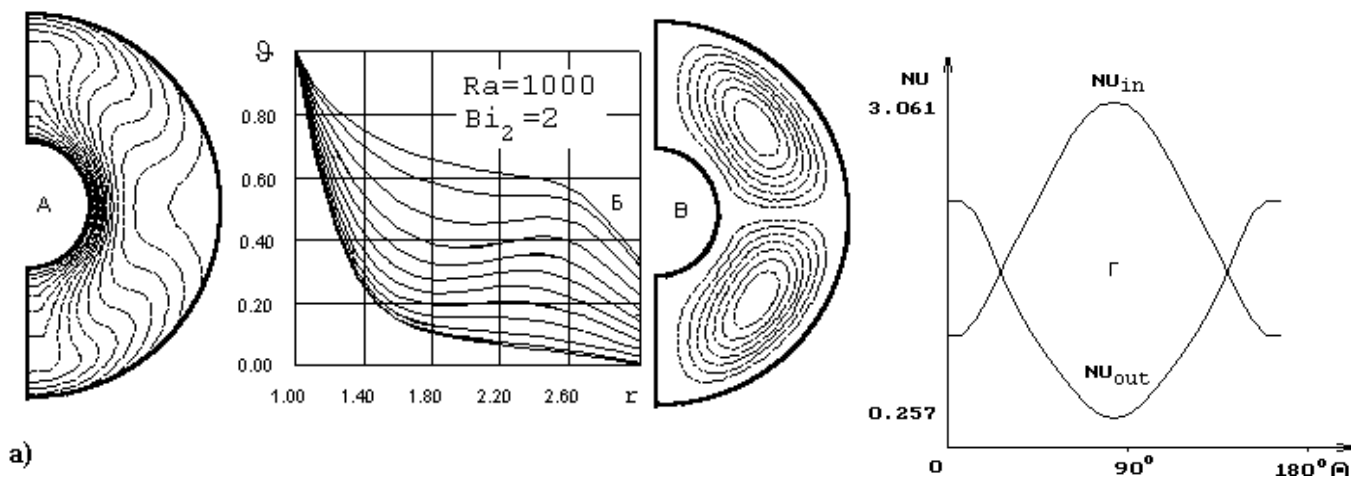
**Рис. 5. Расчетные поля:** а — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — функция тока; Г — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра;  $Q_v/Pe = 0$ ;  $|\Psi_{max}| = 4,67$ ;  $\overline{Nu}_{in} = 1,128$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,377$ ; б — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 1; 10,30; 1,116; 3,292

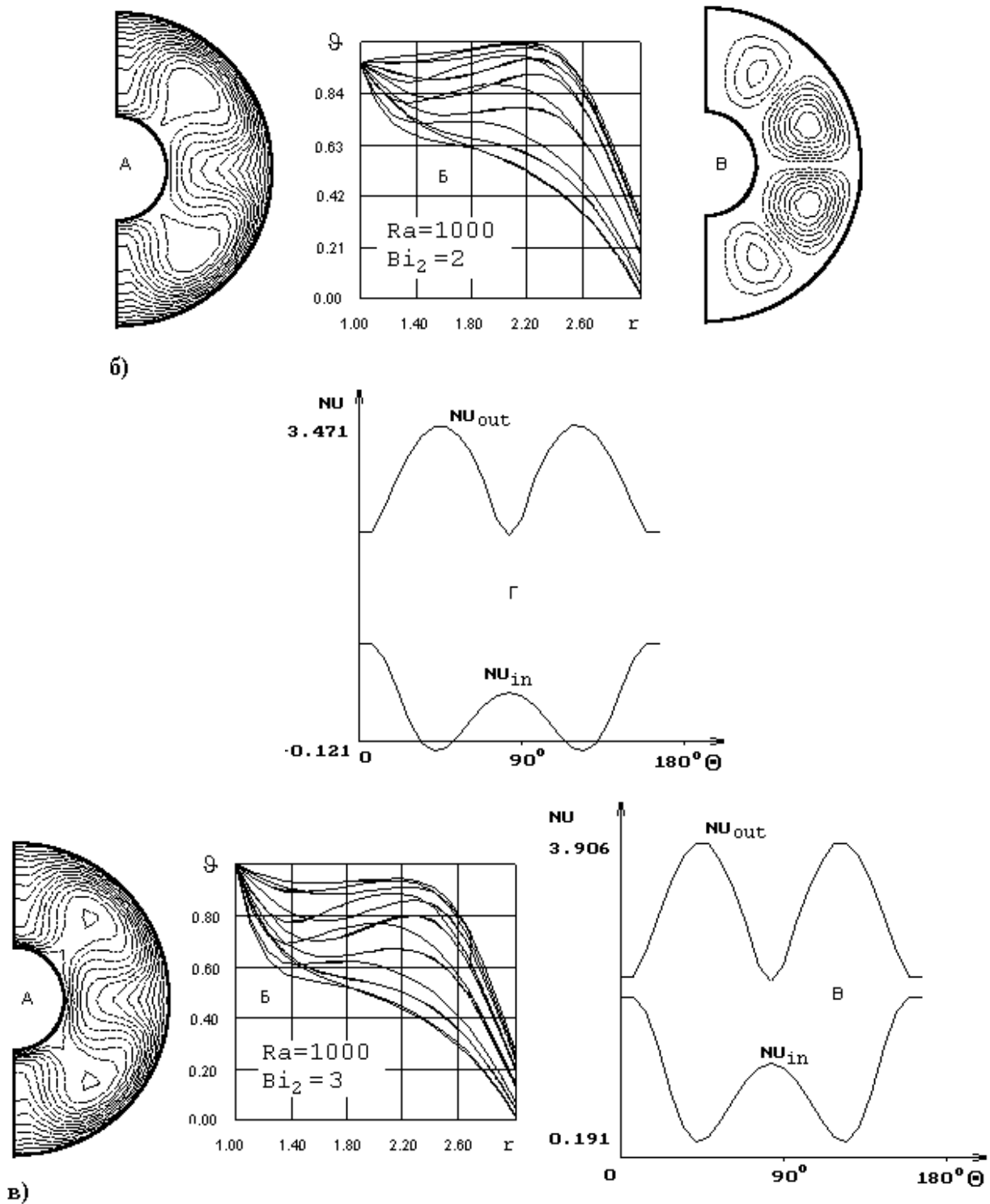
В жидком ядре, как при наличии, так и без внутреннего источника теплоты, образуются четыре вихря: интенсивные вблизи экваториальной плос-

кости и незначительные у полюсов (рис. 5,а,В). Также как и в предыдущем случае, критическое число Релея  $Ra^* \sim 300$  для  $Q_v = 0$ . Поле температуры – концентрические окружности. Картина течения представлена двумя вихрями малой интенсивности  $|\Psi_{\max}| \sim 10^{-4}$ . Локальные числа Нуссельта совпадают с осредненными:  $\overline{Nu}_{in} = 1,093$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,371$ .

На рис. 6 показаны расчетные поля для граничных условий III рода на внешней поверхности ядра:  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -2\vartheta \Big|_{\Gamma_2}$  (рис. 6,а и 5.6,б);  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -3\vartheta \Big|_{\Gamma_2}$  (рис. 6,в). На внутренней границе ядра для температуры задавалось граничное условие I рода:  $\vartheta \Big|_{\Gamma_1} = 1$ .

Для результатов, представленных на рис. 6,а, теплообмен осуществляется конвекцией. Поле температуры и ее распределение по толщине ядра, характерное для конвективного теплообмена, показаны на рис. 6,а,А и 6,а,Б. Как видно из рис. 6,а,Б на внешней границе ядра температура возрастает в области полюсов  $\Theta = 0; 180^\circ$  и уменьшается в области экватора ( $\Theta = 90^\circ$ ). В жидком ядре образуются два вихря (рис. 6,а,В), которые при наличии внутренних источников тепла (рис. 6,б и 6,в) трансформируются в четыре вихря (рис. 6,б,В). При этом характер изменения полей температуры (рис. 5.6,б,А и 5.6,в,А), функции тока (рис. 6,б,В) и чисел Нуссельта (рис. 6,б,Г и 6,в,В) становится отличным от соответствующих полей, приведенных на рис. 6,а. В расчетной области в этом случае образуются два вихря с максимальным значением функции тока  $|\Psi_{\max}| \sim 1,057 \cdot 10^{-12}$ . Осредненные числа Нуссельта принимают следующие значения:  $\overline{Nu}_{in} = 1,348$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,458$ . В ядре имеет место развитая конвекция. Для  $Q_v = 0$  рассчитано критическое число Релея  $Ra^* \sim 250$ .





**Рис. 6. Расчетные поля:** а —  $Q_v/Pe = 0$ ;  $|\Psi_{max}| = 7,30$ ;  $\overline{Nu}_{in} = 2,394$ ;  $\overline{Nu}_{out} = 0,815$ ; б — 1; 8,65; 0,254; 3,018; А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — функция тока; Г — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра; в — А, Б — поле и распределение температуры по толщине ядра; В — распределение локальных чисел Нуссельта на внутренней и внешней границе ядра в зависимости от широты; 1; 9,46; 0,765; 3,200



## Заключение

Наличие внутренних источников теплоты интенсифицирует конвекцию в жидком ядре Земли. Градиенты температуры на внешней границе возрастают по сравнению с градиентами на внутренней поверхности (при  $Q_v = 0$  тенденция обратная). При  $r_2/r_1 = 2$ ;  $Ra = 10^3$  теплообмен в слое осуществляется теплопроводностью. Для граничных условий I рода в области формируются четыре конвективные ячейки, а при подвода тепла снизу – две. При  $r_2/r_1 = 3$ ;  $Ra = 10^3$  в жидком ядре имеет место развитая конвекция, картина течения представлена четырьмя вихрями, за исключением режима, показанного на рис. 6,а. Для разных вариантов граничных условий и толщины слоя численно рассчитаны критические числа Релея, которые позволили определить нижний уровень, определяющий начало конвекции в сферическом слое. Предложенная модель и полученные результаты дополняют существующую информацию о движении жидкости в жидком ядре Земли.

## Литература

1. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 592 с.
2. Жарков В.Н., Трубицын В.П., Самсоненко Л.В. Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1971. 384 с.
3. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо /Пер. с англ. А.Г.Муслимова, Н.А.Силантьева; под ред. А.З.Доминова. М.: Мир, 1984. 314 с.
4. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат.лит., 1983. 414 с.
5. Биргер Б.И., Ковтуненко С.М. Напряжения и деформации в литосфере, вызванные термоконвективными колебаниями Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 3. С. 3—20.
6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
7. Гидромеханика невесомости/Бабский В.Г. и др. М., 1976.
8. Гершуни Г.З., Жуковицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. 392 с.