

УДК 519.246.8

К. В. Шлюфман, Б. Е. Фишман

К ВОПРОСУ ОБ ОБНАРУЖЕНИИ ПОЛЕЗНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Описана задача обнаружения полезной составляющей в рамках аддитивной двухкомпонентной модели, содержащей «полезную составляющую» реализацию некоторого класса шумов. Выполненное имитационное моделирование позволило охарактеризовать зависимость вероятности ложной тревоги от объема выборки временного ряда для случаев, когда амплитуды шума нормально или равномерно распределены. Показано, что при увеличении длины временного ряда дисперсия оценки вероятности ложной тревоги имеет тенденцию к убыванию.

Ключевые слова: *Задача обнаружения сигнала, статистический критерий, спектральная плотность мощности, линейное преобразование, нормализация распределения, вероятность ложной тревоги.*

Konstantin V. Shlufman, Boris E. Fishman. TO THE PROBLEM OF FINDING USEFUL COMPONENT OF A TIME SERIES (Far Eastern State Academy for Social and Humanity Studies)

Described the problem of detecting a useful component in the additive component model containing a "useful component of the" realization of a certain class of noise. Performed simulation has allowed to characterize the probability of false alarm on the sample volume time series for cases where the amplitude of the noise normally or uniformly distributed. It is shown that by increasing the length of time series variance of estimates of the probability of false alarm tends to decrease.

Keywords: *Problem of signal detection, statistical test, power spectral density, linear transformation, normalized distribution, false alarm probability.*

В настоящей работе рассмотрена задача обнаружения полезной составляющей временного ряда $\{v_i\}_{i=1}^N$ в рамках модели, в которой временной ряд представляет собой результат аддитивного взаимодействия «полезной составляющей» $\{s_i\}_{i=1}^N$ и реализации $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ некоторого класса шумов ξ : $\{v_i = s_i + \xi_i\}_{i=1}^N$. При этом под «полезной составляющей» $\{s_i\}_{i=1}^N$ временного ряда понимается любая его составляющая, не являющаяся реализацией заданного класса шумов ξ (класс шумов ξ определяется самим исследовате-

лем). Полагается, что для описания используемого класса шумов достаточно моментов порядка не выше второго.

В задаче обнаружения проверяется основная гипотеза H_0^τ о том, что временной ряд $\{v_i\}_1^N$ представляет собой реализацию $\{\xi_i\}_1^N$ заданного исследователем класса шумов ξ : $v_i = \xi_i$. Иными словами, гипотеза H_0^τ (индекс τ указывает на формулировку основной гипотезы во временной области) означает предположение о том, что роль «полезной составляющей» $\{s_i\}_1^N$ в формировании временного ряда $\{v_i\}_1^N$ является несущественной. Альтернативная гипотеза H_1^τ заключается в предположении о том, что ряд $\{v_i\}_1^N$ не является реализацией из класса шумов ξ .

Принятие основной гипотезы H_0^τ означает, что в качестве модели временного ряда $\{v_i\}_1^N$ может быть использована выбранная модель шума ξ . Принятие альтернативы H_1^τ означает, что временной ряд $\{v_i\}_1^N$ содержит, помимо реализации шума $\{\xi_i\}_1^N$, «полезную составляющую» $\{s_i\}_1^N$. В этом случае в качестве модели временного ряда оправдано может быть использована модель более сложного вида $v_i = s_i + \xi_i$. Таким образом, выбор вида функциональной зависимости «полезной составляющей» $\{s_i\}_1^N$ и оценка значений входящих в неё параметров в самой задаче обнаружения не выполняются.

Согласно такой постановке задачи обнаружения ясно, что для проверки справедливости гипотезы H_0^τ должен применяться непараметрический статистический критерий. Рассмотрим использование статистического критерия, основанного на свойствах выборочных оценок спектральной плотности мощности используемого в модели класса шумов ξ . Применение такого критерия основано на следующей гипотезе H_0^v : выборочное распределение оценок спектральной плотности мощности $c_y(f_i)$, полученных по временному ряду $\{v_i\}_1^N$, соответствует теоретическому распределению оценок спектральной плотности мощности класса шумов ξ [2]. Для проверки основной гипотезы H_0^v , представленной в такой формулировке, используется χ^2 -критерий согласия Пирсона. В этом случае в качестве меры близости временного ряда $\{v_i\}_1^N$ к некоторому классу шумов ξ принимается полученное значение χ^2 — критерия.

Оценки спектральной плотности мощности $c_y(f_i)$ рассматриваются на

гармонических частота $f_k = \frac{k}{N \cdot \Delta}$, $0 < k < \left[\frac{N}{2} \right]$, где символ $[x]$ означает целую часть величины x .

Возможность использовать χ^2 -критерии согласия Пирсона имеет место тогда, когда количество M одинаково распределённых и взаимно независимых оценок спектральной плотности мощности $C_y(f_i)$ достаточно для оценки их теоретического распределения. Множество значений одинаково распределённых и взаимно независимых оценок спектральной плотности мощности $C_y(f_i)$ обозначим C .

В χ^2 -критерии согласия Пирсона в качестве оценки меры расхождения используется статистика

$$d = \sum_{i=1}^m \frac{(M_i - M \cdot p_i)^2}{M \cdot p_i}, \quad (1)$$

где m количество взаимно не перекрывающихся частичных интервалов, на которое разбивается диапазон R_C значений множества C : $R_C = \max(C) - \min(C)$. M_i число значений множества C , попавших в i -ый частичный интервал Δ_i ($1 \leq i \leq m$). p_i вероятность величины $C_y(f_i) \in C$, при справедливой гипотезе H_0^v принять значение, принадлежащее i -му частичному интервалу.

Значения вероятности p_i определяются из закона распределения значений множества C : $P\{C_y(f_i) < \lambda\} = P_C(\lambda)$, установленного для конкретного класса шумов ξ . Выбор количества интервалов m осуществляется из расчёта величины частичного интервала h . Для определения величины частичного интервала h можно воспользоваться формулой Стерджеса [6]

$$h = \frac{R_C}{1 + 3,322 \ln(M)}.$$

Для статистики d , согласно [1], при справедливой гипотезе H_0^v верно утверждение

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P\{d < \lambda\} = P(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{1}{2^{\frac{\eta}{2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)} \cdot x^{\frac{\eta}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx, \quad (2)$$

где $\eta = M - r - 1$ число степеней свободы, r — число параметров теоретического распределения, оценённых по выборке. $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{y-1} dt$ — гамма-

функция Эйлера. Другими словами, при $M \rightarrow \infty$ статистика u имеет χ^2_η распределение.

Из выражений (1), (2) можно получить рабочий критерий для проверки справедливости гипотезы H_0^v

$$d = \sum_{i=1}^n \frac{(M_i - M \cdot P_i)^2}{M \cdot P_i} < \lambda_\alpha.$$

Рассмотрим в качестве класса шумов ξ белый шум, считая, что под белым шумом понимается любая последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, для которой $\{E[\xi_i]\}_{i=1}^N = \{0\}_{i=1}^N$ и $Cov_{ik}[\xi] = \sigma^2 \delta_i^k$, где δ_i^k - символ Кронекера.

При использовании критерия согласия χ^2 Пирсона оценки спектральной плотности мощности $C_\xi(f_k)$ на выбранной совокупности гармонических частот образуют множество C , для которого в соответствии с [1],[3],[4] справедливо утверждение:

$$P\left\{\frac{2C_\xi(f_k)}{\Delta\sigma_\xi^2} < \lambda\right\} = P_C(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx, \quad (3)$$

т.е. оценки значений $C_\xi(f_k)$ имеют χ^2 -распределение с двумя степенями свободы при $0 < k < \left[\frac{N}{2}\right]$ (см., например, [1]).

Это означает, что при проверке гипотезы H_0^v , в случае выбора белого шума ξ , полученное теоретическое распределение (3) может использоваться в χ^2 -критерии согласия Пирсона с $\eta = M - 2$ степенями свободы.

Алгоритм решения описанной задачи обнаружения условно можно поделить на два этапа.

Первый этап. Выполняется дискретное преобразование Фурье, представляемое в матричном виде

$$\eta_1^N = M y_1^N. \quad (4)$$

Вид матрицы M преобразования (4) известен из литературы (см., например, [1]). Коэффициенты разложения η_1^N , определяемые преобразованием (4), представляют собой векторную случайную величину с компонентами, подчиненными распределению $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$. В общем случае коэффициенты разложения η_1^N коррелируют между собой.

Из вида матрицы M следует, что строки с номерами $k = 1, \dots, \frac{N}{2} + 1,$

элементы которых определяются выражением

$$\mathbf{M}_{k,j} = \left(\sum_{m=1}^N \cos^2 \left(\frac{2\pi(k-1)m}{N} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi(k-1)j}{N} \right) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi(k-1)j}{N} \right),$$

в отображении (4) представляют косинус-преобразование временного ряда y_1^N на частотах $f_k = \frac{k-1}{N}, k=1, \dots, \frac{N}{2}+1$.

Строки матрицы \mathbf{M} с номерами $k = \frac{N}{2}+2, \dots, N$, элементы которых определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k,j} &= \left(\sum_{m=1}^N \sin^2 \left(\frac{2\pi \left(k - \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \right) m}{N} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi \left(k - \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \right) j}{N} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi \left(k - \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \right) j}{N} \right), \end{aligned}$$

в отображении (4) представляют синус-преобразование временного ряда y_1^N

на частотах $f_k = \frac{k - \left(\frac{N}{2} + 1 \right)}{N}, k = \frac{N}{2}+2, \dots, N$.

Второй этап. Проверяется справедливость гипотезы о том, что векторная величина $\boldsymbol{\eta}_1^N$ может рассматриваться как выборка из генеральной совокупности с преобразованным распределением величины y_1^N , соответствующим основной гипотезе H_0 .

При подтверждении высказанной гипотезы о распределении величины $\boldsymbol{\eta}_1^N$ можно считать справедливой основную гипотезу H_0 , и сделать вывод об отсутствии какой-либо «полезной составляющей» s_1^N во временном ряду y_1^N .

Для корректного использования статистики χ^2 необходимо выполнить деление области значений коэффициентов разложения η_j на подинтервалы таким образом, чтобы каждый из них был статистически обеспечен на приемлемом минимальном уровне. Это означает необходимость выделения таких подинтервалов области значений величины η_j , чтобы на каждый из них в соответствии с теоретическим законом, приходилось не менее 10 наблюдаемых значений выборки $\boldsymbol{\eta}_1^N$.

Особенность данного алгоритма заключается в том, что в случае справедливости гипотезы H_0 величина η_1^N имеет нормальное распределение при одномерном распределении класса шумов $w_{\xi}(x)$, отличном от нормального. Это позволяет на втором этапе алгоритма проверять соответствие распределения $w_{\xi}(x)$ только одному нормальному распределению при том, что значения ряда y_1^N могут иметь распределение, соответствующие основной гипотезе H_0 и отличное от нормального.

Такая особенность алгоритма обусловлена нормализацией распределения компонент величины η_1^N линейным преобразованием (4). Это явление имеет место, когда стационарный в широком смысле процесс $y(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) одномерное распределение процесса симметрично [4];
- 2) T -зависимый процесс (случайный процесс, удовлетворяющий условию сильного перемешивания и имеющий коэффициент перемешивания равный нулю при лаге больше T) [3], [4].

Будем относить к классу шумов ξ любой процесс, удовлетворяющий условиям нормализации преобразованием (4) и имеющий некоррелируемые значения в различные моменты дискретизации. Для такого процесса, представленного временным рядом y_1^N , справедлива гипотеза H_0 , и вектор η_1^N , полученный преобразованием (4), имеет центрированные нормально распределённые некоррелированные, а значит и независимые, компоненты с дисперсией σ_{η} : $\eta_i \in N(0, \sigma_{\eta}^2)$, $i = 1, \dots, N$.

Каждый компонент векторной величины η_1^N является результатом линейного преобразования M_k , определенного k -ой строкой матрицы M . Таким образом, N компонент величины η_1^N получаются в результате N линейных преобразований последовательности значений наблюдаемого процесса y_1^N (матрица M не вырожденная).

Полагаем, что линейное преобразование M_k имеет ширину полосы частот Δ_c , которая значительно меньше ширины полосы частот энергетического спектра входного процесса Δ_y ,

$$\Delta_c \ll \Delta_y, \quad (5)$$

представленного временным рядом y_1^N . Условие (5) удовлетворяет указанным выше условиям нормализации, т.е. обеспечивает нормализацию значений компонент величины η_1^N [4].

Ширина полосы частот линейного преобразования \mathbf{M}_k определяется по формуле [5]

$$\Delta_c^{(k)} = \int_0^1 c_1^2(f) df / c_1^2(f_0^{(k)}). \quad (6)$$

Особенностью рассматриваемых преобразований $\mathbf{M}_k, k=1, \dots, \frac{N}{2}+1$ ставится появление локальных максимумов, приходящихся на резонансные частоты $f_0^{(k)} = \pm \frac{k-1}{N}$.

Для практически значимых ситуаций формулу (6), используемую для вычисления ширины полосы частот преобразования \mathbf{M}_k , можно упростить:

$$\Delta_c^{(k)} = \frac{1}{N} = \Delta_c, \quad k=1, \dots, N \quad (7)$$

В таких случаях ширина полосы частот $\Delta_c^{(k)}$ для всех преобразований \mathbf{M}_k одинаковая ($k=1, \dots, N$) и определяется только объёмом выборки N . Ширина полосы частот Δ_c преобразований \mathbf{M}_k обратно пропорциональна объёму выборки, что позволяет легко определить значение Δ_c , при имеющемся объёме выборки N . Таким образом, увеличение объёма выборки N приводит к соответствующему уменьшению значения Δ_c .

Из (5) и (7) следует, что для наибольшей эффективности алгоритма обнаружения ширина полосы частот энергетического спектра Δ_ξ шумовых составляющих класса ξ должна удовлетворять требованию

$$\Delta_\xi \gg \frac{1}{N},$$

а ширина полосы частот энергетического спектра «полезной составляющей» $\Delta_s (s_1^N)$

$$\Delta_s \approx \Delta_c.$$

Выполнение на втором этапе проверки основной гипотезы о распределении величины η_1^N требует задания уровня значимости критерия. Более высокий уровень значимости, позволяя с большей вероятностью установить присутствие «полезной составляющей» во временном ряду, может значительно увеличить вероятность ложной тревоги (принятие основной гипотезы в случае, если справедлива альтернативная).

Рассмотрим распределение коэффициентов разложения η_1^N при справедливости основной гипотезы H_0 , в случае, когда наблюдаемый временной

ряд y_i^N является конечной реализацией гауссова белого шума. Отметим, что белый шум имеет нормальное распределение $y_i \in N(0, \sigma_y)$, $i = 1, \dots, N$, обладающие свойством симметричности (т.е. выполняется первое условие нормализации). При этом значения временного ряда y_i^N некоррелированы, поэтому корреляционная матрица имеет вид

$$\mathbf{K}_y = \sigma_y^2 \mathbf{E}. \quad (8)$$

N -мерная плотность вероятности нормально распределенной совокупности случайных величин определяется формулой [4]

$$w_y(\mathbf{x}_1^N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{K}_y}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_1(\mathbf{y}))' \mathbf{K}_y^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_1(\mathbf{y})) \right\}.$$

Учитывая вид ковариационной матрицы (8) и $\mathbf{m}_1\{\mathbf{y}_i\} = \mathbf{0}$, N -мерная плотность вероятности нормального белого шума имеет вид

$$w_y(\mathbf{x}_1^N) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_y^N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_y^2} \mathbf{x}' \mathbf{x} \right\}.$$

Плотность вероятности векторной величины η_i^N , полученной в результате преобразования (4) величины y_i^N , определяется формулой [4], [7]

$$w_\eta(\mathbf{x}_1^N) = w_y(\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{x}_1^N, \dots, \mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{x}_1^N) \cdot \det(\mathbf{D}_N),$$

где \mathbf{M}_k^{-1} линейные преобразования, определённые k -ой строкой матрицы \mathbf{M}^{-1} , определяющей обратное преобразование для (4), т.е. $y_i^N = \mathbf{M}^{-1} \eta_i^N$. \mathbf{D}_N - якобиан преобразования величины η_i^N в y_i^N :

$$\mathbf{D}_N = |\mathbf{M}^{-1}|.$$

Из сказанного следует, что распределение коэффициентов разложения η_i^N имеет вид

$$\begin{aligned} w_\eta(\mathbf{x}_1^N) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{K}_\eta}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{M}' \boldsymbol{\eta})' \mathbf{K}_y^{-1} \mathbf{M}' \boldsymbol{\eta} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_y^N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_y^2} \boldsymbol{\eta}' \mathbf{M} \mathbf{M}' \boldsymbol{\eta} \right\} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_y^N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_y^2} \boldsymbol{\eta}' \mathbf{E} \boldsymbol{\eta} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \sigma_y^N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_y^2} \boldsymbol{\eta}' \boldsymbol{\eta} \right\}. \end{aligned}$$

Иными словами, в результате линейного преобразования (4) нормальный белый шум переходит в совокупность некоррелированных нормально

распределённых центрированных величин, т.е. компоненты вектора η $\eta_i \in N(0, \sigma_\eta^2), i=1, \dots, N$, $K_\eta = \sigma_\eta^2 E$, $\sigma_\eta = \sigma_y$.

Так как некоррелированные нормально распределённые величины независимы, то величину η_i^N можно рассматривать как выборку размера N из генеральной совокупности нормально распределённых величин.

Решение о наличие «полезной составляющей» (γ_1) или об её отсутствии (γ_0) не является абсолютным, а имеет определенные вероятностные характеристики. Так, ситуация принятия решения γ_1 при справедливой гипотезе H_0 характеризуется как вероятность ложной тревоги $P\{\gamma_1|H_0\}$, а ситуация принятия решения γ_0 при справедливой гипотезе H_1 характеризуется как вероятность пропуска «полезной составляющей» $P\{\gamma_0|H_1\}$. Как вероятность ложной тревоги $P\{\gamma_1|H_0\}$, так и вероятность пропуска «полезной составляющей» $P\{\gamma_0|H_1\}$ зависит от класса шумов ξ гипотезы H_0 , длины временного ряда N и от уровня α значимости критерия Пирсона.

Исследуем зависимость вероятности ложной тревоги (принятия решения γ_1 при справедливой гипотезе H_0 $P\{\gamma_1|H_0\}$) от длины временного ряда N и уровня значимости α критерия согласия χ^2 .

Введем обозначение зависимости вероятности принятия решения γ_1 от длины временного ряда N и уровня значимости критерия согласия α

$$P\{\gamma_1|H_0\} = P_0(N, \alpha),$$

Заметим, что из связи вероятностей принятия правильного решения $P\{\gamma_0|H_0\}$ и вероятности ложной тревоги $P\{\gamma_1|H_0\}$ вытекает следующее соотношение:

$$P\{\gamma_0|H_0\} = 1 - P\{\gamma_1|H_0\}. \quad (9)$$

Из соотношения (9) следует, что результаты, определенные для $P\{\gamma_1|H_0\}$, позволяют легко получить $P\{\gamma_0|H_0\}$.

Для исследования зависимости вероятности ложной тревоги $P_0(N, \alpha)$ алгоритм обнаружения «полезной составляющей» было выполнено имитационное моделирование реализаций белого шума $y = \xi$. (Объем каждой серии составлял 200 реализаций фиксированной длины N) Серия от серии отличалась длиной реализаций N , величина которой варьировалась от 48 значений до 600. Серии генерировались с шагом $\Delta N = 12$, выбранным для удобства сравнения полученных результатов ($N = 48, 60, \dots, 600$).

Для каждой серии с определенным значением N было подсчитано количество $N_{\gamma_1|H_0}(N, \alpha)$ принятых решений $\gamma_1|H_0$. Тогда величина $\tilde{P}_0(N, \alpha) = \frac{N_{\gamma_1|H_0}(N, \alpha)}{200}$ может использоваться в качестве частотной оценки вероятности $P\{\gamma_1|H_0\}$.

Рассмотрим зависимость оценок $\tilde{P}_0(N, \alpha)$ для уровня значимости критерия согласия $\alpha = 0.05$, представленную на рис. 1.

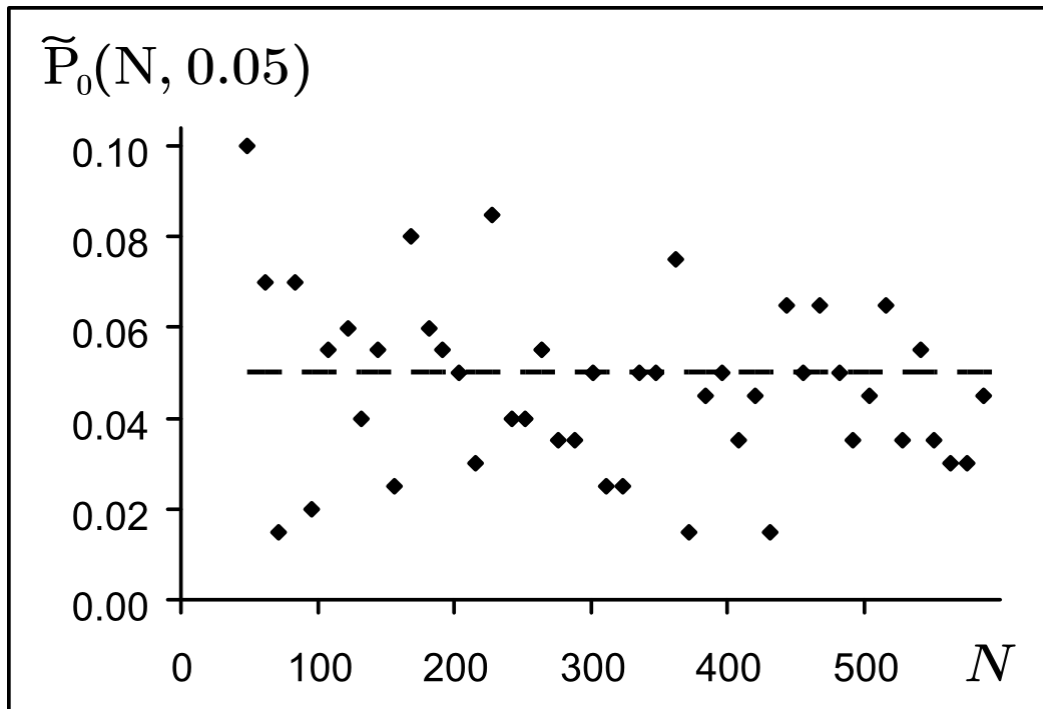


Рис. 1. Корреляционное поле полученных при моделировании оценок вероятности ложной тревоги $\tilde{P}_0(N, \alpha)$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N при уровне значимости $\alpha = 0.05$. Пунктирной линией показан уровень α

Из рис. 1 видно, что:

- значения оценок вероятности ложной тревоги $\tilde{P}_0(N, \alpha)$ флуктуируют относительно заданного уровня значимости критерия согласия Пирсона α ;
- среднее значение m оценок $\tilde{P}_0(N, \alpha)$ при $\alpha = 0.05$ составило $m_{0.05} = 0.0473$;
- при увеличении длины временного ряда N несколько уменьшается разброс оценок $\tilde{P}_0(N, \alpha)$.

Для количественных характеристик последнего вывода были определены дисперсии оценок вероятности ложной тревоги $\sigma_{\tilde{P}_0(N, \alpha)}^2 = D[\tilde{P}_0(N, \alpha)]$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N .

На рис. 2 представлены результаты расчета значений дисперсии $\sigma_{N,\alpha}^2$.

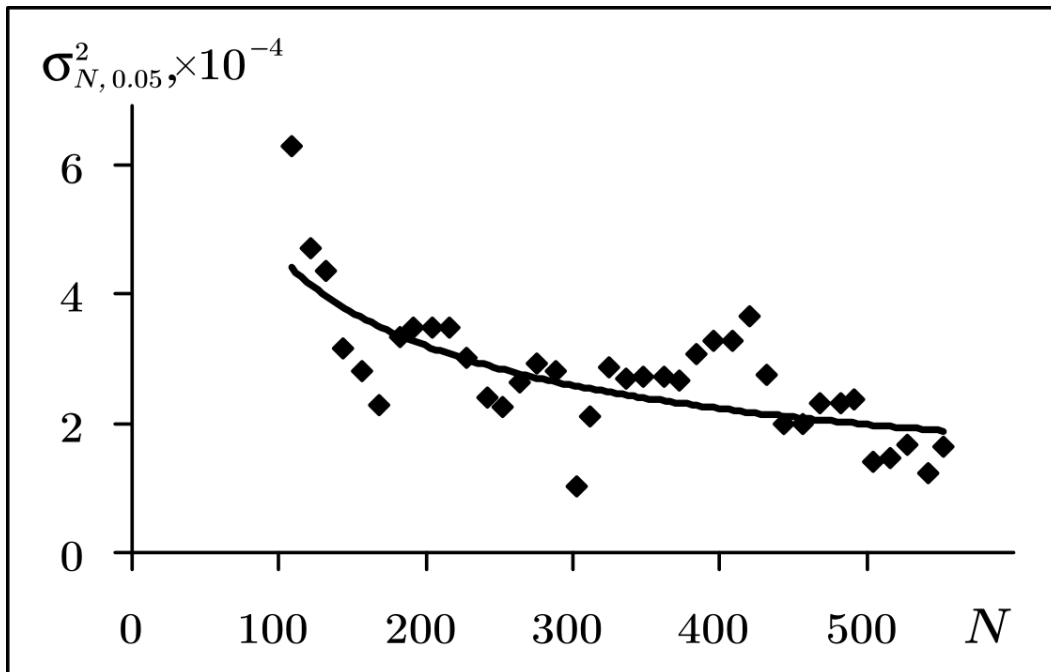


Рис. 2. Корреляционное поле оценок дисперсии оценки $\sigma_{N,\alpha}^2$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N при уровне значимости критерия согласия $\alpha = 0.05$. Сплошной линией представлена степенная аппроксимация тренда

В корреляционном поле (рис. 2) методом наименьших квадратов была рассчитана оптимальная степенная аппроксимация зависимости дисперсии оценки вероятности ложной тревоги $\sigma_{N,\alpha}^2$ от длины временного ряда N . Результаты расчета могут быть представлены следующим образом:

$$\sigma_{N,0.05}^2 = 0.005 \cdot N^{-0.5} \text{ для } \alpha = 0.05.$$

Таким образом, дисперсия $\mathbf{P}_0(N, \alpha)$ с ростом N убывает по степенному закону как корень из объёма выборки. Это означает, что оценки вероятности ложной тревоги $P\{\gamma_1|H_0\}$ состоятельны.

Выше было отмечено, что преобразование Фурье обладает свойством нормализации случайных величин имеющих симметричную плотность вероятности. При этом под симметричностью плотность вероятности понимается симметрия относительно 50 процентной квантили.

Представляет интерес рассмотреть зависимость от длины временного ряда N значение вероятности принятия решения γ_1 при справедливой гипо-

тезе H_0 в случае шума ξ с равномерным распределением случайных значений в диапазоне $[-1; 1]$.

Для проверки нормального распределения коэффициентов разложения η_i^N использовался критерий согласия Пирсона χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0.05$.

Методика исследования зависимости вероятности ложной тревоги $P_0(N, \alpha)$ аналогична методике описанной выше.

На рис. 3 представлены оценки вероятностей ложной тревоги $\tilde{P}_0(N, 0.05)$, полученные на сериях по 200 реализаций шума.

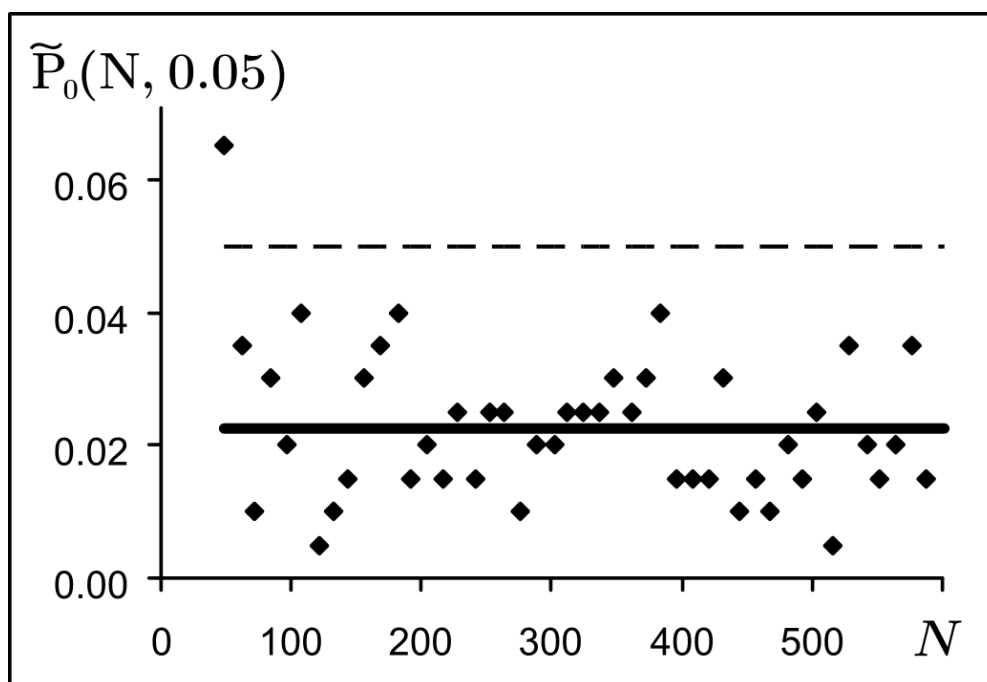


Рис. 3. Корреляционное поле, полученное при моделировании оценок вероятности ложной тревоги $P_0(N, \alpha)$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N при уровне значимости критерия согласия Пирсона χ^2 $\alpha = 0.05$.

(Сплошной линией показано средние значение оценок.

Пунктиром отмечен уровень значимости критерия согласия Пирсона)

Результаты, полученные в ходе данного имитационного моделирования, показывают, что:

- значения оценок вероятности ложной тревоги $P_0(N, \alpha)$ флуктуируют относительно своего среднего значения $m_{0.05} = 0.0227$ (при $\alpha = 0.05$);
- значения оценок вероятности ложной тревоги $P_0(N, \alpha)$ в среднем вдвое меньше заданных уровней значимости критерия согласия Пирсона α ;
- При увеличении длины временного ряда N дисперсия оценки $P_0(N, \alpha)$ уменьшается.

Для иллюстрации последнего утверждения были вычислены дисперсии оценок вероятности ложной тревоги $\sigma_{N,\alpha}^2 = D[P_0(N,\alpha)]$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N .

На рис. 4 представлены результаты расчета значений дисперсии $\sigma_{N,\alpha}^2$.

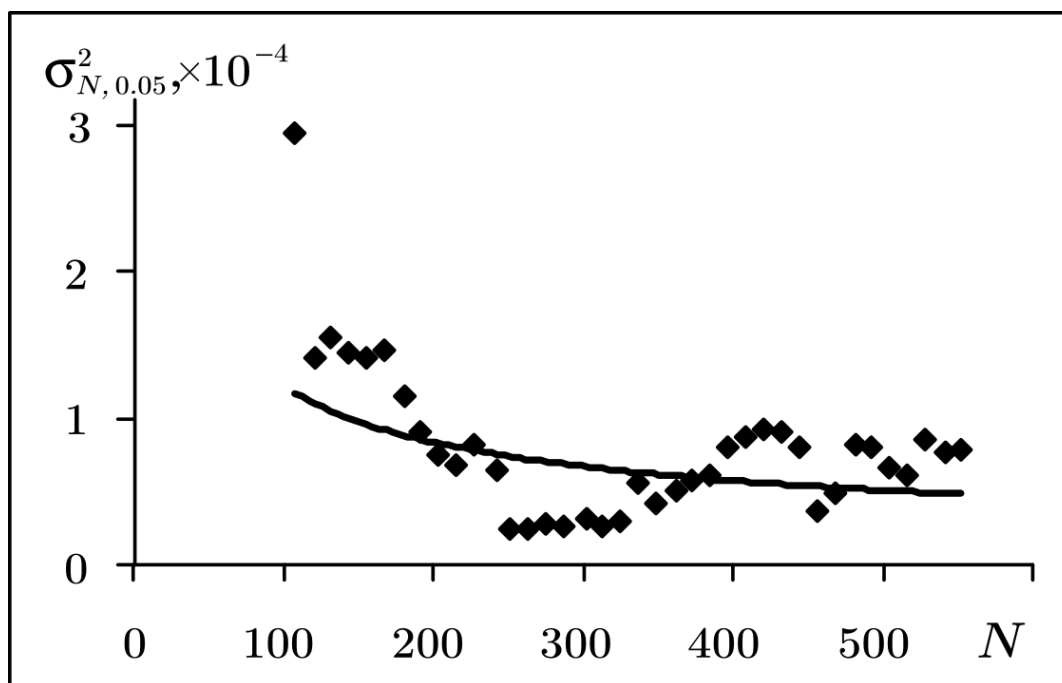


Рис. 4. Корреляционное поле оценок дисперсии оценки $\sigma_{N,\alpha}^2$ на рассматриваемом диапазоне значений длины временного ряда N при уровне значимости критерия согласия Пирсона $\alpha = 0.05$. (Сплошной линией представлена степенная аппроксимация тренда)

Методом наименьших квадратов получена степенная аппроксимация зависимости дисперсии оценки $\sigma_{N,\alpha}^2$ от длины временного ряда N . Такая зависимость имеет вид:

$$\sigma_{N,0.05}^2 = 0.0015 \cdot N^{-0.543}.$$

Из рис. 4 видно, что качество степенной аппроксимации не высокое, однако её отрицательный показатель указывает на уменьшение дисперсии $\sigma_{N,\alpha}^2$ с ростом N .

В целом моделирование описанной процедуры обнаружения показывает, что при справедливой основной гипотезе H_0 :

- оценки вероятности ложной тревоги $P\{V_1|H_0\}$ алгоритма обнаружения «полезной составляющей» на рассматриваемом диапазоне значений N флуктуируют относительно своего среднего значения, которое при нормальном распределении значений класса шумов ξ статистически незначимо

отличается уровня значимости α критерия Пирсона, а при равномерном распределении значений ξ , в два раза меньше уровня значимости α ;

– вероятность принятия правильного решения $P\{\gamma_0|H_0\}$ достигает удовлетворительных значений ($P\{\gamma_0|H_0\} > 0.92$) уже при сравнительно небольших N ($N \geq 100$);

– значение дисперсии оценок вероятности $\sigma_{\gamma_0}^2(P\{\gamma_0|H_0\})$ с увеличением длины временного ряда N имеет тенденцию уменьшению, что свидетельствует о состоятельности оценок вероятности $P\{\gamma_0|H_0\}$.

Литература

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Перевод с английского Журбенко И.Г. и Носко В.П. под редакцией Беляева Ю.К. М.: Мир, 1976. 757 с.

2. Богданович В. А., Вострецов А. Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 320 с.

3. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. М.: Мир, 1974. 406 с.

4. Левин Б.Д. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

5. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Перевод с английского Хабарова О.И. и Сидоровой Г.А. под редакцией Рыжака И.С. М.: Мир, 1990. 584 с.

6. Скороход А.В. Вероятность. Основные понятия. Структура. Методы // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. фундам. направл., 1989, 43, С. 5-145.

7. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Советское радио, 1961. 558 с.