УДК 512.54

Б. Е. Фишман

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ, СОДЕРЖАЩИХСЯ В РИСОВСКОЙ ПОЛУГРУППЕ МАТРИЧНОГО ТИПА И ИМЕЮЩИХ НЕНУЛЕВУЮ СУММУ КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Исследована совокупность элементов, содержащихся в рисовской полугруппе матричного типа над множеством трёх элементов {–1, 0, 1} с единичным по модулю определителем и имеющих ненулевую сумму классификационных характеристик $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Установлено, что операция умножения на совокупности этих элементов не обладает свойством рефлексивности. Показано, что если ввести понятие «абелева подгруппа при условии арефлексивности умножения входящих в неё элементов», то существует восемь таких абелевых подгрупп-триад. На основе использования порождающих элементов и определяющих соотношений выявлено, что все эти абелевы подгруппы-триады по признаку генетического родства принадлежат одному семейству.

Ключевые слова: рисовская полугруппа матричного типа, единичный по модулю определитель, элементы с ненулевой суммой классификационных характеристик, абелева подгруппа при условии арефлексивности умножения входящих в неё элементов, семейство подгрупп на основе генетического родства.

В работе [3] рассматривалась рисовская полугруппа матричного типа над множеством трёх элементов {–1, 0, 1} с единичным по модулю определителем. Эта полугруппа содержит матрицы 2×2 (архоны) и включает в себя два принципиально разных подмножества. В составе одного из них содержатся архоны, образующие абелевы подгруппы относительно операции умножения матриц. В составе другого — архоны, которые не объединяются в абелевы подгруппы относительно операции умножения матриц. Все архоны второго подмножества обладают общим свойством — у каждого из них не равна нулю сумма классификационных характеристик $p + q$, причём

$$\begin{cases} p = a_{1,1} \times a_{2,1} + a_{1,2} \times a_{2,2}\,, \\ q = a_{1,1} \times a_{1,2} + a_{2,1} \times a_{2,2}\,, \end{cases} \quad (1)$$

где символ $a_{i,j}$ означает матричный элемент i-й строки и j-го столбца в рассматриваемой матрице 2×2, входящей в рисовскую полугруппу.

Фишман Борис Ентильевич — кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, Биробиджан); e-mail: bef942@mail.ru.

Опишем состав и характеристики архонов с $p+q\neq 0$ в подмножествах $\{\bar{A}\}$, $\{\bar{A}^+\}$ и $\{\bar{A}^-\}$, определённых в [3].

Прежде всего, заметим, что в подмножестве $\{\bar{A}\}$ отсутствуют архоны с $p+q\neq 0$.

Подмножество $\{\bar{A}^+\}$, которое задаётся условием $\det A=+1$, содержит следующие архоны с $p+q\neq 0$.

1. В подмножестве $\{\bar{A}^+(1)\}$ –

$$\begin{cases} \bar{A}_1^+(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2^+(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \\ \bar{A}_5^+(1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_6^+(1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

У этих архонов $p=+1$, $q=1$, $p+q=2$.

2. В подмножестве $\{\bar{A}^+(2)\}$ –

$$\begin{cases} \bar{A}_1^+(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_4^+(2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \\ \bar{A}_5^+(2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_8^+(2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3}$$

У этих архонов $p=-1$, $q=-1$, $p+q=-2$.

Подмножество $\{\bar{A}^-\}$, которое задаётся условием $\det A=-1$, содержит следующие архоны с $p+q\neq 0$.

3. В подмножестве $\{\bar{A}^-(1)\}$ –

$$\begin{cases} \bar{A}_2^-(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_3^-(1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \\ \bar{A}_6^-(1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_7^-(1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

У этих архонов $p=+1$, $q=1$, $p+q=2$.

4. В подмножестве $\{\bar{A}^-(2)\}$ –

$$\begin{cases} \bar{A}_3^-(2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_4^-(2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \\ \bar{A}_7^-(2)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad \bar{A}_8^-(2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

У этих архонов $p=-1$, $q=-1$, $p+q=-2$.

Результат умножения на самого себя каждого архона, у которого $p+q\neq 0$, определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Операция умножения любого архона, у которого $p+q\neq 0$, на самого себя не может быть реализована на множестве архонов.

Доказательство.

Из выражений (2) — (5) следует, что любой архон с $p+q\neq 0$ может относиться к одному из четырёх типов, которые имеют вид одной из следующих типовых матриц:

$$\tilde{A}_{11}=\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ \tilde{A}_{12}=\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & \gamma\end{pmatrix},\ \tilde{A}_{21}=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix},\ \tilde{A}_{22}=\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix} \quad (6)$$

Параметры δ и γ в определениях (6) могут принимать значение либо $+1$, либо -1 независимо друг от друга.

Тогда можно представить результат умножения на себя каждой из этих типовых матриц следующим образом:

$$\begin{cases}(\tilde{A}_{11})*(\tilde{A}_{11})=\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma^2 & \gamma\delta\\ \gamma\delta & \gamma^2+\delta^2\end{pmatrix},\\ (\tilde{A}_{12})*(\tilde{A}_{12})=\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & \gamma\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ \delta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma^2 & 0\\ 2\gamma\delta & \gamma^2\end{pmatrix},\\ (\tilde{A}_{21})*(\tilde{A}_{21})=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma^2 & 2\gamma\delta\\ 0 & \gamma^2\end{pmatrix},\\ (\tilde{A}_{22})*(\tilde{A}_{22})=\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma^2+\delta^2 & \gamma\delta\\ \gamma\delta & \gamma^2\end{pmatrix}.\end{cases} \quad (7)$$

Из формул (7) видно, что в матрицах, представляющих результаты умножения на себя каждого архона, у которого $p+q\neq 0$, содержится либо матричный элемент $(\gamma^2+\delta^2)$, либо матричный элемент $2\gamma\delta$. Подстановка возможных значений параметров δ и γ показывает, что этот матричный элемент может быть равен либо $+2$, либо -2. Иными словами, матричное умножение не может быть реализовано на множестве архонов, у которых $p+q\neq 0$.

Введём понятие «абелева подгруппа при условии арефлексивности умножения входящих в неё элементов». Ясно, что множество «абелевых подгрупп» включает в себя подмножество «абелевых подгрупп при условии арефлексивности умножения входящих в них элементов».

Теорема 1 означает, что на множестве архонов, у которых $p+q\neq 0$, могут существовать только «абелевы подгруппы при условии арефлексивности умножения входящих в них элементов» (т.е. в них не выполняется умножение архона на самого себя).

Ответ на вопрос о том, имеются ли на множестве архонов, у которых $p+q\neq 0$, «абелевы подгруппы при условии арефлексивности умножения входящих в них элементов», определяется следующей теоремой.

Теорема 2. Существует восемь абелевых подгрупп-триад при условии арефлексивности умножения входящих в них двух архонов разных типов, у которых $p+q\neq 0$.

Доказательство.

2.1. Сначала рассмотрим архоны первого и четвёртого типов, у которых имеется ноль на главной диагонали. Найдём произведение двух разных архонов, которые принадлежат к одному и тому же из этих типов. Представим результаты по каждому из этих двух типов раздельно.

Произведение архонов первого типа:

$$(\tilde{A}_{11})*(\tilde{A}'_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \gamma' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & \gamma\delta' \\ \gamma'\delta & \gamma\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}. \qquad (8.а)$$

Произведение архонов четвертого типа:

$$(\tilde{A}_{22})*(\tilde{A}'_{22}) = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \delta' & \gamma' \\ \gamma' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\delta' + \gamma\gamma' & \delta\gamma' \\ \gamma\delta' & \gamma\gamma' \end{pmatrix}. \qquad (8.б)$$

Поскольку $\delta, \gamma, \gamma', \delta'$ отличны от нуля, то возможны следующие два случая: 1) $\delta\delta' = \gamma\gamma'$; 2) $\delta\delta' = -\gamma\gamma'$.

В первом случае результат произведения не является архоном, поскольку содержит матричный элемент, равный либо -2, либо $+2$.

Во втором случае выполняется условие

$$\delta\delta' + \gamma\gamma' = 0. \qquad (9)$$

Если (9) множить на $\gamma\delta$, то, учитывая, что $(\gamma)^2 = (\delta')^2 = 1$, получим

$$\gamma\delta' = -\delta\gamma'. \qquad (10)$$

В данном случае результатом произведения является архон, у которого $p + q = 0$. Но в работе [3] было получено, что результат умножения архона, у которого $p + q = 0$, на архон, у которого $p + q \neq 0$, не является архоном. Таким образом, не существует подгруппы относительно операции умножения матриц, содержащей два архона первого типа или два архона четвёртого типа.

2.2. Теперь рассмотрим произведение архона первого типа на архон четвёртого типа:

$$(\tilde{A}_{11})*(\tilde{A}'_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \delta' & \gamma' \\ \gamma' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & 0 \\ \gamma\delta' + \delta\gamma' & \gamma\gamma' \end{pmatrix}. \qquad (8.в)$$

Рассматриваемая пара архонов может образовать абелеву подгруппу. Для этого необходимо выполнение следующего условия:

$$\gamma\delta' + \delta\gamma' = 0. \qquad (11)$$

Поскольку γ и γ' отличны от нуля, то возможны следующие два случая: 1) $\gamma\gamma' = +1$; 2) $\gamma\gamma' = -1$.

В первом случае в правой части (8. в) будет архон $\bar{A}_1^+$, который представляет собой единичную матрицу. Это означает, что архон первого типа и архон четвёртого типа вместе с архоном $\bar{A}_1^+$ образуют абелеву подгруппу-триаду.

Всего имеются четыре такие подгруппы-триады: $\{\tilde{A}_2^-(1);\ \tilde{A}_3^-(2);\ \bar{A}_1^+\}$, $\{\tilde{A}_6^-(1);\ \tilde{A}_7^-(2);\ \bar{A}_1^+\}$, $\{\tilde{A}_3^-(1);\ \tilde{A}_4^-(2);\ \bar{A}_1^+\}$, $\{\tilde{A}_7^-(1);\ \tilde{A}_8^-(2);\ \bar{A}_1^+\}$.

Во втором случае в правой части (8. в) будет архон $\overline{\boldsymbol{A}}_3^+$. Дальнейшее умножение $\overline{\boldsymbol{A}}_3^+$ на любой из сомножителей, исходно рассматриваемых в (8. в), даёт архон того же типа, что и этот сомножитель. Поскольку в соответствии с п. 2.1 не существует подгруппы относительно операции умножения матриц, содержащей два архона первого типа или два архона четвертого типа, то во втором случае нет новых подгрупп.

2.3. Рассмотрим архоны второго и третьего типов, у которых имеется ноль на побочной диагонали. Найдём произведение двух разных архонов, которые принадлежат к одному и тому же из этих типов. Представим результаты по каждому из этих двух типов раздельно.

Произведение архонов второго типа:

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{12})*(\widetilde{\boldsymbol{A}}'_{12}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ \delta' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & 0 \\ \delta\gamma' + \gamma\delta' & \gamma\gamma' \end{pmatrix}. \qquad (12.\text{а})$$

Произведение архонов третьего типа:

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{21})*(\widetilde{\boldsymbol{A}}'_{21}) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & \gamma\delta' + \delta\gamma' \\ 0 & \gamma\gamma' \end{pmatrix}. \qquad (12.\text{б})$$

Рассматриваемые пары архонов могут образовать абелеву подгруппу. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \gamma\delta' + \delta\gamma' = 0, \\ \gamma\gamma' = 1. \end{cases} \qquad (13)$$

Поскольку параметры γ и γ' могут быть равны либо -1, либо $+1$, то второе условие в (13) означает, что $\gamma = \gamma'$. Тогда из первого условия в (13) следует, что $\delta = -\delta'$.

Всего имеются четыре подгруппы-триады, содержащие по 2 архона второго или третьего типа: $\{\widetilde{\boldsymbol{A}}_1^+(1); \widetilde{\boldsymbol{A}}_1^+(2); \overline{\boldsymbol{A}}_1^+\}$, $\{\widetilde{\boldsymbol{A}}_5^+(1); \widetilde{\boldsymbol{A}}_5^+(2); \overline{\boldsymbol{A}}_1^+\}$, $\{\widetilde{\boldsymbol{A}}_2^+(1); \widetilde{\boldsymbol{A}}_8^+(2); \overline{\boldsymbol{A}}_1^+\}$, $\{\widetilde{\boldsymbol{A}}_6^+(1); \widetilde{\boldsymbol{A}}_4^+(2); \overline{\boldsymbol{A}}_1^+\}$.

2.4. Рассмотрим произведение архона второго типа на архон третьего типа:

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{12})*(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{21}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & \gamma\delta' \\ \delta\gamma' & \delta\delta' + \gamma\gamma' \end{pmatrix}. \qquad (12.\text{в})$$

Для того, чтобы произведение было архоном, необходимо равенство нулю одного или двух его матричных элементов. Поскольку параметры γ, δ, γ' и γ' могут быть равны либо -1, либо $+1$, то $\gamma\gamma' \neq 0$, $\gamma\delta' \neq 0$ и $\gamma\delta' \neq 0$. Таким образом, необходимо, чтобы

$$\delta\delta' + \gamma\gamma' = 0. \qquad (14)$$

Если (14) умножить на $\delta\gamma$ и учесть, что $\delta^2 = \gamma^2 = 1$, то легко получить, что $\gamma\delta' = -\delta\gamma'$. Это означает, что результатом произведения (12. в) является архон, у которого $p + q = 0$. Поскольку результат умножения архона, у которого $p + q = 0$, на архон, у которого $p + q \neq 0$, не является архоном (см. [3]), то рассматриваемые пары архонов не могут входить в состав абелевой подгруппы.

2.5. Рассмотрим произведение архона первого типа на архон второго:

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ \delta' & \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\delta' & \gamma\gamma' \\ \gamma\gamma' + \delta\delta' & \delta\gamma' \end{pmatrix} \qquad (15.\text{а})$$

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12})*(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11}) = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ \delta' & \gamma' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma'\gamma \\ \gamma'\gamma & \delta'\gamma + \gamma'\delta \end{pmatrix} \qquad (15.\text{б})$$

Из (15. а) и (15. б) следует, что при любых сочетаниях значений параметров $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ не выполняется условие $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12}) = (\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12})$. Это означает, что не выполняется коммутативность произведения архона первого типа и архон второго типа. Следовательно, эти архоны не могут одновременно входить в состав абелевой подгруппы.

Аналогично можно показать, что

$(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{21}) \neq (\tilde{\boldsymbol{A}}'_{21})*(\tilde{\boldsymbol{A}}_{11})$, $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{21}) \neq (\tilde{\boldsymbol{A}}'_{21})*(\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})$ и $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})*(\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12}) \neq (\tilde{\boldsymbol{A}}'_{12})*(\tilde{\boldsymbol{A}}_{22})$.

Таким образом, отсутствуют абелевы подгруппы, которые содержат:

- архон первого типа и архон второго или архон третьего типа;
- архон четвёртого типа и архон второго или архон третьего типа.

Выше были рассмотрены все возможные варианты умножений архонов, для которых $p + q \neq 0$. Следовательно, на множестве таких архонов не существует других подгрупп (ни абелевых, ни не абелевых), кроме уже определённых.

Анализ результатов умножения элементов каждой из восьми абелевых подгрупп-триад позволяет задать эти подгруппы с помощью следующего генетического кода, общего для всех подгрупп: $x_1^2 = E$, $x_2 x_3 = E$.

Здесь использованы обозначения:

$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_2^-(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_2^-(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_6^-(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_7^-(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_6^-(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_7^-(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_4^-(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_4^-(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_7^-(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_8^-(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_7^-(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_8^-(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_4^-(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_3^-(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_4^-(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_1^+(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_1^+(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_1^+(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_1^+(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_5^+(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_5^+(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_5^+(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_5^+(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_2^+(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_8^+(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_2^+(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_8^+(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$,
$x_1 = \bar{\boldsymbol{A}}_1^+$, $x_2 = \tilde{\boldsymbol{A}}_6^+(1)$, $x_3 = \tilde{\boldsymbol{A}}_4^+(2)$ для подгруппы-триады $\{\tilde{\boldsymbol{A}}_6^+(1);\ \tilde{\boldsymbol{A}}_4^+(2);\ \bar{\boldsymbol{A}}_1^+\}$.

Выполненный анализ указывает на то, что при условии арефлексивности умножения архонов, у которых $p + q \neq 0$, существует восемь абелевых подгрупп-триад, в каждую из которых входят по два архона разных типов. В составе четырёх триад имеются один архон первого типа и один архон четвёртого типа, а в составе остальных четырёх триад — один архон второго типа и один архон третьего типа.

Рассмотрим генетическое представление абелевых подгрупп-триад, полученных при условии арефлексивности умножения входящих в них элементов. Можно показать, что все указанные подгруппы принадлежат одному семейству $\mathbf{F}_5$ по признаку генетического родства (см., например, [1], [2]).

Таким образом, исследование, начатое в работах [3] и [4], завершено. Подтверждена интуитивная идея о том, что в полугруппе объектов, которые:

1) представимы в виде матриц 2×2;
2) имеют матричные элементы, равные или –1, или 0, или 1;
3) удовлетворяют условие $|\det A| = 1$,

содержатся разнообразные абелевы подгруппы. При этом каждый объект полугруппы входит не менее чем в одну такую подгруппу, а каждая из подгрупп принадлежит одному из пяти семейств по признаку генетического родства.

Программу дальнейшего исследования определяет следующий актуальный вопрос: обогатится ли состав семейств и абелевых подгрупп при расширении исходной полугруппы? При этом, прежде всего, речь идет о расширении, связанном со вторым условием, т. е. о расширении множества значений, которые могут принимать матричные элементы объектов полугруппы.

Список литературы

1. *Босс В.* Теория групп. М.: КомКнига, 2007. 216 с.
2. *Зайцев В. Ф.* Введение в современный групповой анализ. Группы преобразований на плоскости: учебное пособие / РГПУ им. А. И. Герцена, 1996. [Электронный ресурс] URL: http://eqworld. ipmnet. ru/ru/library/books/Zajcev_t1_1996ru.pdf (дата обращения 12.02.2015).
3. *Фишман Б. Е.* Абелевы подгруппы в рисовской полугруппе матричного типа // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. № 4 (17). 2014. С. 92—103.
4. *Фишман Б. Е.* О составе и классификации абелевых подгрупп, содержащихся в рисовской полугруппе матричного типа // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. № 3 (20). 2015. С. 101—109.

* * *

Fishman Boris E.

GROUP PROPERTIES OF THE ELEMENTS CONTAINED IN THE REESE´S SEMIGROUP OF MATRIX TYPE AND HAVING NONZERO SUM OF CLASSIFICATION CHARACTERISTICS

(Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan)

A population of elements contained in the Reese´s semigroup of matrix type over a set {-1, 0, 1} with a single on the module determinant and having a non-zero sum of classification of characteristics p and q is studied. It was found that the operation of multiplication of these elements doesn't possess the property of reflexivity. It is shown that if to enter concept of «Abelian subgroup on condition of an arefleksivity multiplication of its elements,» there are eight available abelian subgroups-triads. On the basis of the use of generating elements and defining relations it is shown that all these abelian subgroups-triads belong to the single family by the principle of genetic relationships.

Keywords: the Rees`s semigroup of matrix type, single on the module determinant, the elements with non-zero sum of classification of characteristics, the abelian subgroups on condition of an arefleksivity multiplication of its elements, the family of subgroups on the base of genetic relatedness.

References

1. Boss V. *Teoriya grupp* (Theory of Groups). Moscow, KomKniga publ., 2007. 216 p.
2. Zaitsev V. F. *Vvedenie v sovremenniy gruppovoy analiz. Gruppy preobrazovaniy na ploskosti* (Introduction to the modern group analysis. Groups of transformations on the plane) Available at: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Zajcev_t1_1996ru.pdf
3. Fishman B. E. Abelian subgroups Reese´s semigroup of matrix type [Abelevy podgruppy v risovskoy polugruppe matrichnogo tipa], *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleihema*, 2014, no. 4(17), pp. 92—103.
4. Fishman B. E. About the composition and classification of abelian subgroups contained in the rees`s semigroupsof matrix type [O sostave i klassifikacii abelevyh podgrupp, soderzhashhihsja v risovskoj polugruppe matrichnogo tipa], *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleihema*, 2015, no. 3 (20), pp. 101—109.

* * *