УДК 519.21

**В. А. Дубко**

# ТЕОРЕМА ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ЯДЕР ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ИТО И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Для доказательства теоремы о виде уравнения для стохастических ядер интегральных инвариантов, связанных с обобщенным уравнением Ито, существования и единственности его решения используется стохастический первый интеграл специального типа. На основе этого уравнения построены соответствующие прямые и обратные уравнения Колмогорова.

*Ключевые слова:* стохастические ядра, интегральный инвариант, уравнение Колмогорова, обобщенное уравнение Ито.

**Valeriy A. Doobko**

**EQUATION THEOREM FOR THE KERNEL OF THE GENERALIZED ITO’S EQUATION AND ITS APPLICATION IN BUILDING UP KOLMOGOROV'S EQUATIONS**

(Academy of Municipal Administration, Kiev)

The first stochastic integral of the special type is used to prove the theorem about the form of the equation for stochastic kernels of integral invariants. It is associated with a generalized Ito's equations. The first stochastic integral of the special type is also used to prove the existence of this equation and the only way to solve it. On the basis of this equation direct and inverse Kolmogorov's equations are built up.

*Key words:* kernel stochastic's, integral invariant, Kolmogorov's equations, generalized Ito's equations.

Источником инвариантов первых интегралов являются различные законы сохранения (энергии, массы, импульса, момента импульса и т. п.). Например, если набор счетного числа начальных значение решений некоторого динамического уравнения связать с точками (аналогами частиц), то при выполнении условий существования и единственности решений — число этих точек будет оставаться одним и тем же в любой момент времени. Предельным обобщением этого представления, является плотность числа точек и, соответственно, неизменность интеграла по пространству от этой плотности. Функцию, обладающую таким свойством, называют ядром интегрального инварианта.

При определенных ограничениях возможно построить уравнение в частных производных для ядер. Не исключается и ситуация, когда огра-

**Дубко Валерий Алексеевич —** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры автоматизированного управления технологическими процессами (Академия муниципального управления, г. Киев), e-mail: doobko2008@yandex.ru

ничениями являются свойства функционалов, сохраняющихся в некоторой ограниченной области координат и времени. Для таких случаев приходят к представлению о локальных инвариантах. Эволюционирующие структуры, функционалы, связанные с областью начальных значений, рассматриваются как *динамические инварианты.* Примером динамического инварианта может служить элемент фазового объема гиперповерхности [2].

В данной статье продемонстрируем, как можно привлечь представление о стохастическом первом интеграле для построения и доказательства теорем о виде этих уравнений и теоремы о существовании и единственности решений уравнений для ядер интегральных инвариантов.

Важную роль в схеме доказательств играет правило дифференцирования случайных функций, зависящие от решений, связанных с обобщенными уравнениями Ито. Этому правилу мы дали название «обобщенная формула Ито-Вентцеля» [3]. Выбор названия связан с тем, что при отсутствии пуассоновских возмущений эта формула переходит в формулу, которая известна под названием формулы Ито-Вентцеля [2].

Затем, опираясь на полученные уравнения для ядер, строим прямые и обратные уравнения Колмогорова, связанные с обобщенными уравнениями Ито.

**1.** Пусть $x(t)$ решение системы стохастических уравнений:

$$
\begin{gathered}
dx_i(t) = a_i(t;x(t))dt + b_{i,k}(t;x(t))dw_k(t) + \int\limits_{R(\gamma)} g_i(t;x(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma), \\
x(t) = x(t;x(0)), \quad \forall x(0) \in R^n, \\
\int\limits_0^T dt \int\limits_{R(\gamma)} |\nabla^\alpha g(t;x;\gamma)|^\beta \prod(d\gamma) < \infty, \int\limits_{R(\gamma)} \prod(d\gamma) < \infty, \ \alpha = \overline{0,2}, \ \beta = \overline{1,4}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $i, j = \overline{1,n}; \ k = \overline{1,m}$, *и по индексам, встречающимся дважды, ведется суммирование;* $w_k(t)$ — независимые винеровские процессы, $\nu(\Delta t, \Delta\gamma)$ пуассоновская случайная мера, $M[\nu(\Delta t, \Delta\gamma)] = \Delta t \prod(\Delta\gamma)$. Относительно коэффициентов $a_i(t;x), b_{i,k}(t;x)$ полагается, что они непрерывны и ограничены вместе со своими, не ниже вторых по компонентам $x$, производными, по совокупности переменных; $\nabla^k$ - обозначает всевозможные комбинации частных производных $k$ — го порядка по компонентам $x$, в предположении, что соответствующие выражения непрерывны по совокупности переменных. Условие $\int\limits_{R(\gamma)} \prod(d\gamma) < \infty.$, означает, что интенсивность скачков за бесконечно малый промежуток времени конечна.

Отметим, что эти требования избыточно жесткие для установления существования и единственности решения (1). Но они обеспечивают корректность выводов по рассматриваемым проблемам в статье в целом, позволяют сопоставлять полученные выводы, в рамках ограничений [1, с. 298], при построении уравнений Колмогорова, методами [1] и данной работы.

**Определение.** Случайную функцию $\rho(t;x)$ назовем локальной стохастической плотностью динамического инварианта, локальным стохастическим ядром [6] обобщенного уравнения Ито (2), если случайная функция $u(t;J;x) = J\rho(t;x)$ является стохастическим первым интегралом, т. е.

$$\rho(t;x(t;x(0))J(t;x(0)) = \rho(0;x(0)), \quad \forall x(0) \in D \subset R^n, \tag{2}$$

$$dJ(t) = J(t)\times$$

$$\times\left\{\mathrm{K}(t)dt + \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}dw_k(t) + \int\limits_{\mathrm{R}(\gamma)}(\det[A(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_j})] - 1)\nu(dt,d\gamma)\right\}, \tag{3}$$

$$J(t) = J(t, x(0))|_{t=0} = 1, \quad \dim A(\square) = n\times n;$$

$$K(t) = \left[\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i}\right)\right],$$

$\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Уравнение (3) является уравнением для якобиана преобразования от $x(0)$ к $x(t;x(0))$. Решение (3) может быть представлено в виде:

$$J(t) = \exp\left\{\int_0^t[\mathrm{K}(\tau) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{i,k}(\tau;x(\tau))}{\partial x_i}\right)^2]d\tau + \int_0^t\frac{\partial b_{i,k}(\tau;x(\tau))}{\partial x_i}dw_k(\tau) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t\int\limits_{R(\gamma)}\ln|\det[A(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(\tau;x(\tau);\gamma)}{\partial x_j})]|\nu(d\tau,d\gamma)\right\}.$$

Т. е. $J(t) > 0, \forall t \geq 0$.

Далее *взамен знака* $\int\limits_{\mathrm{R}(\gamma)}$ *будем использовать обозначение* $\int$ .

Перейдем к установлению вида уравнения в частных производных для $\rho(t;x)$.

Из требования (2) следует, что

$$dJ(t;x(0))\rho(t;x(t;x(0))) = 0, \ \forall x(0) \in \Gamma \subset \mathrm{R}^n. \tag{4}$$

Пусть $\rho(t;x)$ является решением уравнения:

$$\partial_t\rho(t;x) = Q(t;x)dt + D_k(t;x)dw_k(t) + \int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \tag{5}$$

$$\rho(t;x)\big|_{t=0} = \rho(x) \in C_0^4;$$

Относительно коэффициентов предполагаем, что они ограничены и непрерывны по совокупности переменных $x,t$, вместе со своими частными производными, не ниже четвертых, по компонентам $x$, и $G(t;x;\gamma)$ относится к тому же классу функций, что и компоненты $g(t;x;\gamma)$.

Покажем, что $\rho(t;x)$ должно являться решением стохастического уравнения в частных производных вида:

$$\partial_t \rho(t;x) = -\left[\frac{\partial \rho(t;x)a_i(t;x)}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho(t;x)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]dt -$$

$$-\frac{\partial \rho(t;x)b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}dw_k(t) +$$

$$+\int [\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-\rho(t;x)]\nu(dt;d\gamma), \quad (6)$$

$$\rho(t;x)\big|_{t=0} = \rho(x) \in C_0^4; \rho(x) \geq 0, \rho(x) \not\equiv 0,$$

где $x^{-1}(t;x;\gamma)$ определяется как решение относительно $y$ уравнения

$$y + g(t;y;\gamma) = x, \quad (7)$$

во всех подобластях однозначности, а $\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)$ — якобиан перехода, соответствующий такой замене. Черточкой над большими буквами и далее будем обозначать детерминанты матриц.

Заменим требование (4) такими:

$$[dJ(t;x(0))\rho(t;x(t;x(0)))]_1 = 0, \quad \forall x(0) \in \Gamma, \quad (8)$$

$$[dJ(t;x(0))\rho(t;x(t;x(0)))]_2 = 0, \quad \forall x(0) \in \Gamma. \quad (9)$$

где (8) соответствует стохастическому дифференциалу Ито, а (9) связано с учетом пуассоновских компонент.

**Теорема 1**. При указанных ограничениях на коэффициенты уравнений (1), (5), $Q(t;x), D_k(t;x)\ G(t;x;\gamma)$ обеспечивающие выполнение условия (4) однозначно определяются равенствами:

$$\text{I.1)} - Q(t;x) = \frac{\partial \rho(t;x)a_i(t;x)}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho(t;x)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i \partial x_j};$$

$$\text{I.2)} - D_k(t;x) = \frac{\partial \rho(t;x)b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i};$$

$$\text{I.3)}\ G(t;x;\gamma) = [\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-\rho(t;x)].$$

II). При начальных условиях для (6) $\rho(t;x)$ является единственным решением стохастического уравнения (5) с коэффициентами, определяемыми I.1), I.2).

**Доказательство**. Ограничения теоремы на коэффициенты уравнения (5) обеспечивают применимость обобщенной формулы Ито-Вентцеля [3, 7, 10], утверждающей, что если для функций, зависящих от параметра $x$, стохастический дифференциал определяется уравнением вида (5)

$$d\rho(t;x(t)) = Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k + b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t))dw_k +$$
$$+[a_i(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t)) + \frac{1}{2}b_{i,k}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} +$$
$$+b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))]dt + \int G(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma))\nu(dt;d\gamma) +$$
$$+\int[(\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)) - \rho(t;x(t))]\nu(dt;d\gamma).$$

Рассмотрим составляющую дифференциала уравнения Ито этого выражения:

$$[d\rho(t;x(t))]_1 = Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k +$$
$$+[a_i(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t)) + \frac{1}{2}b_{i,k}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} + \qquad (10)$$
$$+b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))]dt + b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t))dw_k.$$

На явном виде $[d\rho(t;x(t))]_2$ мы остановимся чуть позднее.

А). Воспользовавшись (3), (10) и формулой Ито [1], находим:

$$[dJ(t)\rho(t;x(t))]_1 = \rho(t;x(t))[dJ(t)]_1 + J(t)[d\rho(t;x(t))]_1 +$$
$$+J(t)b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial b_{j,k}(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i}dt =$$
$$= J(t)[b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial b_{j,k}(t)}{\partial x_j}\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + a_i(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t)) +$$
$$+\frac{1}{2}b_{i,k}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} + b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t)) +$$
$$+b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t)) + Q(t;x(t)) +$$
$$+\rho(t;x(t))\frac{\partial a_i(t)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}(\frac{\partial b_{i,k}(t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial b_{j,k}(t)}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{i,k}(t)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial b_{i,k}(t)}{\partial x_i})]dt +$$
$$+J(t)[b_{i,k}(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + \rho(t;x(t))\frac{\partial b_{i,k}(t;x(t))}{\partial x_i} + D_k(t;x(t))]dw_k$$

Учитывая требование (8) обращения в ноль этого выражения, сгруппировав слагаемые, приходим к установлению необходимости выполнения равенств I.1), I.2) теоремы.

Решение (6) при указанных ограничениях существует и единственно [9]. Последнее и приводит к утверждению теоремы без пуассоновской составляющей.

В). Перейдем к рассмотрению условия I.3) леммы.

На всех участках между пуассоновскими скачками процесс подвержен только винеровским возмущениям и сохраняется порядок гладкости. В момент скачка происходит добавление функционала с теми же условиями гладкости:

$$I(dt)=\int[\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-\rho(t;x)]\nu(dt;d\gamma)$$

В качестве начального условия на последующем интервале между скачками выбирается значение ядра до момента скачка. В силу теорем о свойствах решений уравнений в частных производных [9] и на последующем интервале между скачками решение будет существовать и не нарушится порядок его гладкости. Поэтому остается проверить, что для системы

$$[d_t\rho(t;x(t))]_2=\int\{[(\rho(t;x(t)+g(t;x(t)\gamma))-\rho(t;x(t))+$$
$$+[(\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)-g(t;x^{-1}(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma);\gamma);\gamma))\times$$
$$\times\bar{D}\left(x^{-1}(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)\right)-\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma))]\}\nu(dt;d\gamma)=$$
$$=-\int[\rho(t;x(t))-\rho(t;x(t))\bar{D}(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_j+g_j(t;x;\gamma))})]\nu(dt;d\gamma),$$
$$[dJ(t)]_2==J(t)\int(\det[A(\delta_{i,j}+\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_j})]-1)\nu(dt,d\gamma),$$

— будет обращаться в ноль, в силу условия (9), дифференциал:

$$[d_t\rho(t;x(t))J(t)]_2=$$
$$=\int\{[\rho(t;x(t))+(\rho(t;x(t))\bar{D}(\frac{\partial x_j^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_i+g_i(t;x;\gamma))})-\rho(t;x(t))]\times$$
$$\times[J(t)+J(t)\bar{A}(\delta_{i,j}(t)+\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_l})-J(t))])-\rho(t;x(t))J(t)\}\nu(dt;d\gamma)=$$
$$=J(t)\int[\rho(t;x(t))\bar{D}(\frac{\partial x_j^{-1}(t;x(t)+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_i+g_i(t;x;\gamma))})\bar{A}(\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)+x_i}{\partial x_j})-$$
$$-\rho(t;x(t))]\nu(dt;d\gamma).$$

Для завершения проверки I.3) достаточно убедиться в равенстве нулю подынтегральной разности. Это будет верно, если произведение детерминантов $\bar{D}(\cdot)\bar{A}(\cdot)=1$.

Учитывая следующее из определения (7) то, что $x^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma))=x$, находим:

$$\det[D(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_l+g_i(t;x;\gamma))})A(\frac{\partial(g_l(t;x;\gamma)+x_i)}{\partial x_j})]=$$

$$=\det S(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_l+g_l(t;x;\gamma))}\frac{\partial(g_l(t;x;\gamma)+x_l)}{\partial x_j})=$$

$$=\det S(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial x_j})=\det S(\delta_{i,j})=1$$

Это равенство и приводит к утверждению, что в области, где обеспечивается однозначное соответствие между переменными уравнения $y=x+g(t;x;\gamma)$, решение уравнения с коэффициентами, определяемыми равенствами теоремы, существует и единственно.

Из положительности решения $J(t)$ уравнения (3) и выбора $\rho(x)\geq 0$, следует и неизменность знака $\rho(t;x)$. С учетом этого свойства приходим к утверждению:

**Теорема 2.** При выполнении ограничений на коэффициенты уравнений (1), (5), при условии, что:

$$\int_{\Gamma}\rho(x)d\Gamma(x)\leq 1,\ \Gamma\subset\mathrm{R}^n,\ \rho(x)\geq 0,\ d\Gamma(x)=\prod_{l=1}^{n}dx_l.$$

- $\rho(t;x)$ обеспечивающее выполнение требования (1), является решением уравнения (6).

Уравнение (6) было получено при требованиях принадлежности $\rho(x)$ к классу $C_0^4$. Однако если взять уравнение (6) за исходное и последовательно выполнить исследования свойств его решения, то можно убедиться, что для существования и однозначности решения (6) ограничения на гладкость будут менее жесткими как для $\rho(x)$, так и коэффициентов уравнений (1), (5).

При требовании существования и единственности решения уравнения (1) во всем пространстве добавляются глобальные равенства [2] [3]

$$\int_{\mathrm{R}^n}f(x)\rho(t;x)d\Gamma(x)=\int_{\mathrm{R}^n}f(x(t;y))\rho(y)d\Gamma(y),\quad \int_{\mathrm{R}^n}\rho(t;x)d\Gamma(x)=1,$$

для любой непрерывной и ограниченной $f(x)$, требование обращения в ноль $\rho(x)$ вместе со своими производными на бесконечности по $x$.

Отметим, что, как и для детерминированных уравнений, существует полная система интегральных инвариантов $\rho_r(t;x), r=\overline{1,n+1}$. Любое ядро $\rho(t;x)$ однозначно выражается через начальное значение $\rho(x)$ и набор этих ядер. Для стохастических процессов схема этого доказательства этого утверждения вполне аналогична доказательству для детерминированных систем [2, 9].

Подчеркнем, что существование плотности $\rho(t;x)$ связано со свойствами меры $\mu(\Delta\Gamma;t)$ ($\int\limits_{R^n} \mu(d\Gamma,t) = const$), индуцируемой некоторым динамическим отображением. При условии, что существует в каком-то смысле предел $\mu(\Delta\Gamma;t)/\mu(\Delta\Gamma)$ по $\Delta\Gamma \downarrow 0$, он отождествляется с $\rho(t;x)$. Но это $\rho(t;x)$ может и не обладать необходимой гладкостью, позволяющей построить уравнение вида (6).

**2.** Уравнения для $\rho(t;x)$ можно построить разными способами и для разных представлений стохастических уравнений [2]. Мы воспользуемся полученным выше уравнением (6) для стохастических ядер со случайной мерой Пуассона.

Теперь покажем, как, опираясь на уравнение (6), можно получить обратные и прямые уравнения Колмогорова для переходных вероятностей.

Перейдем в уравнении для ядер (6) к центрированной случайной мере Пуассона:

$$\tilde{\nu}(\Delta t,\Delta\gamma) = \nu(\Delta t,\Delta\gamma) - \Delta t \prod(\Delta\gamma).$$

В этом случае уравнение (6) переходит в такое:

$$\begin{aligned} d_t\rho(t;x) = &-\frac{\partial\rho(t;x)b_{i,k}(t;x)}{\partial x_i}dw_k(t) - [\frac{\partial\left(\rho(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i} - \\ &-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;x)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)\right)}{\partial x_i \partial x_j}]dt + \qquad (11) \\ &+\int[\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right) - \rho(t;x)]\Pi(d\gamma)dt + \\ &+\int[\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right) - \rho(t;x)]\tilde{\nu}(dt;d\gamma). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$\mathrm{M}[\rho(t;x)] = p(t;x).$$

После взятия математического ожидания от обеих частей в (11) находим, что $p(t;x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t;x)}{\partial t} = &-\frac{\partial\left(p(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(p(t;x)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j} + \\ &+\int[p\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right) - p(t;x)]\Pi(d\gamma) \qquad (12) \end{aligned}$$

(12) — это уравнение Колмогорова для плотности.

Построим уравнения для плотности переходных вероятностей процессов, являющихся решением обобщенных уравнений Ито (1).

Под плотностью переходных вероятностей для случайного процесса понимают *детерминированную функцию* $p(t;x/s;y)$, обеспечивающую выполнение интегрального равенства:

$$p(t;x)=\int_{\mathbb{R}^n} p(t;x/s;y)\,p(s;y)\,d\Gamma(y),\ t>s, \tag{13}$$

Из (13) следует, что функция $p(t;x/s;y)$ не зависит от распределения $p(s;y),\ \forall s\ge 0$, следовательно, и от произвольного $p(0;y)=\rho(y)$.

После подстановки (13) в уравнение (12), в силу произвольности $p(s;y)$, приходим к выводу, что требование (12) будет выполнено, если

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}p(t;x/s;y)=\\
&=-\Big[\frac{\partial\big(p(t;x/s;y)a_i(t;x)\big)}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\big(p(t;x/s;y)b_{i,k}(t;x)b_{j,k}(t;x)\big)}{\partial x_i\partial x_j}\Big]+\\
&\qquad+\int\Big[p\big(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)/s;y\big)\bar{D}\big(x^{-1}(t;x;\gamma)\big)-\\
&\qquad\qquad-p(t;x/s;y)\Big]\Pi(d\gamma).
\end{aligned} \tag{14}$$

*Это и будет прямое уравнение Колмогорова* для плотности переходных вероятностей, связанное с уравнением (1), поскольку в нем фигурирует производная по конечному моменту времени $t>s$. Отличие его записи от приводимой в [1, с. 301, будет разъяснено далее.

Перейдем к построению обратного уравнения Колмогорова для $p(t;x/s;y)$.

Т. к. $p(t;x/s;y)$ детерминированная функция, то можно представить (6) в таком виде:

$$p(t;x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{M}[p(t;x/s;y)\rho(s;y)]\,d\Gamma(y).$$

От этого представления, с учетом свойства (2) $\rho(s;y)$, переходим к равенству:

$$\begin{aligned}
p(t;x)&=\int_{\mathbb{R}^n} p(t;x/s;y)\mathrm{M}[\rho(s;y)]\,d\Gamma(y)=\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{M}[p(t;x/s;y(s;z))\rho(0;z)]\,d\Gamma(z),
\end{aligned}$$

где $y(s;z)$ – решение обобщенного уравнения Ито (1).

Поскольку левая часть равенства не зависит от $s$, то после дифференцирования по $s$, используя обобщенную формулу Ито, приходим к равенству:

$$0=\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}[d_s\, p(t;x/s;y(s;z))\rho(0;z)]d\Gamma(z)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{M}\{[\frac{\partial}{\partial s}p(t;x/s;y(s;z))+a_j(s;y(s;z))\frac{\partial}{\partial y_j}p(t;x/s;y(s;z))+$$

$$+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y(s;z))b_{i,k}(s;y(s;z))\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_i}p(t;x/s;y(s;z))]\,ds+$$

$$+\ b_{j,k}(s;y(s;z))\frac{\partial}{\partial y_j}p(t;x/s;y(s;z))\ dw_k(s)+$$

$$+\int[\,p(t;x/s;y(s;z)+g(t;y(s;z);\gamma))-p(t;x/s;y(s;z))]\nu(ds;d\gamma)]\}\rho(0;z)d\Gamma(z)$$

Учитывая вновь свойство (2), переходим к новому равенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\{[\frac{\partial}{\partial s}p(t;x/s;y)+a_j(s;y)\frac{\partial}{\partial y_j}p(t;x/s;y)+$$

$$+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y)b_{i,k}(s;y)\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_i}p(t;x/s;y)]\ +$$

$$+\int[\,p(t;x/s;y+g(s;y;\gamma))-p(t;x/s;y)]\,\Pi(d\gamma)\}\,p(s;y)d\Gamma(y)=0.$$

В свою очередь, требования независимости $p(t;x/s;y)$ от $p(s;y)$ будет выполнено если:

$$\frac{\partial}{\partial s}p(t;x/s;y)+a_j(s;y)\frac{\partial}{\partial y_j}p(t;x/s;y)+$$

$$+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y)b_{i,k}(s;y)\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_i}p(t;x/s;y)\ +$$

$$+\int[\,p(t;x/s;y+g(s;y;\gamma))-p(t;x/s;y)]\,\Pi(d\gamma)=0, \qquad (15)$$

Полученное уравнение — это *обратное уравнение Колмогорова,* (поскольку в него входит производная по начальному моменту времени $s<t$ ).

При отсутствии пуассоновских возмущений вид уравнений (14) и (15) будет соответствовать виду уравнений Колмогорова, например, в [1].

Дадим пояснения относительно отличий в виде этих уравнений и приводимых в [1, с. 301—302]. Для этого возвратимся к уравнениям (1). Заметим, что при построении уравнений этой работы привлекались обобщенные уравнения Ито (1) со случайной пуассоновской мерой. В [1] использовались обобщенные уравнения Ито с центрированными мерами Пуассона. Для того чтобы иметь возможность сопоставить полученные уравнения с уравнениями с центрированными мерами, в исходных уравнениях (1) потребуется перейти от таких уравнений к уравнениям с пуассоновскими мерами. Это потребует в полученных выражениях выше выполнить замену коэффициентов $a_j(t;z)$ на коэффициенты

$$\overline{a}_j(t;z) = a_j(t;z) - \int g(t;z;\gamma)\Pi(d\gamma)\cdot$$

Такая замена и приведет к совпадению (14) и (15) с видом уравнений полученных в [1, с. 301—302].

В заключение отметим, что первые варианты доказанных теорем об уравнениях для ядер, связанных с обобщенными уравнениями Ито, приводились в [4, 5]. Варианты построения уравнений Колмогорова, на основе уравнений для стохастических ядер, поданы в [4, 6], а затем отображены в [8].

### Список литературы


1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968. 354 с.
2. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989. 185 с.
3. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы. (Некоторые аспекты математического моделирования.) // Відкриті еволюціонуючі системи (Додаток): збірник текстів доповідей першої науково-практичної конференції, Київ. К.: Вид-во ВНЗ ВМУРОЛ, 2002. С. 14—31.
4. *Дубко В. А.* Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы: учебно-метод. пособ. К.: Логос, 2012. 68 с.
5. *Дубко В. А.* Метод построения уравнения для ядер обобщенных уравнений Ито // Математическое моделирование физических и информационных процессов: сборник материалов Всероссийской заочной научно-практической конференции, Биробиджан, 25 декабря 2012 г. / под общ. ред. В. Л. Земляка. Биробиджан: Изд-во ФГБОУ ВПО «ПГУ им. Шолом-Алейхема», 2013. С. 33—41.
6. *Дубко В. А.* Применение уравнения для стохастической плотности обобщенного уравнения Ито при построении уравнений Колмогорова // Математическое моделирование физических и информационных процессов: сборник материалов Всероссийской заочной научно-практической конференции, Биробиджан, 25 декабря 2012 г. / под общ. ред. В. Л. Земляка. Биробиджан: Изд-во ФГБОУ ВПО «ПГУ им. Шолом-Алейхема», 2013. С. 41—45.
7. *Дубко В. А.* О двух подходах к построению обобщенной формулы Ито-Вентцеля / В. А. Дубко, Е. В. Карачанская, Вычислительный центр ДВО РАН. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2012. 27 с.
8. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений: учеб. пособие. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. 91 с.
9. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.
10. *Karachanskaya E. V.* «The direct approach» for a proof of the generalized Ito-Wentzell formula for a generalized stochastic differential equation / arXiv: 1309.3365. 18 p.


* * *