УДК 681.323(075)

А. П. Бахрушин, Г. И. Бахрушина, Р. И. Цой, О. Б. Че

Разложение сигналов на симметричном интервале по системам простых, составных и формальных систем базисных функций

Целью работы является обзор известных методов разложения сигнала по различным системам базисных функции на симметричном интервале. В частности рассматриваются простые, составные и формальные системы базисных функций и анализируются их свойства. В статье отмечается, что выбор конкретной системы базисных функций должен определяться особенностями анализируемого сигнала, а также спецификой решаемой задачи и возможностью использования тех или других методов анализа.

Ключевые слова: спектр, сигнал, коэффициенты разложения, системы базисных функций.

Alexander P. Bahrushin., Galina I. Bahrushina, Rudolf I. Tsoy, Oleg B. Cher

SIGNAL DECOMPOSITION WITHIN SYMMETRICAL INTERVAL BY SYSTEMS OF SIMPLE, COMPOSITE AND FORMAL BASIS FUNCTIONS

(Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan)

This work is a survey of well-known methods of signal decomposition by different basis functions within symmetrical interval. In particular, the simple, composite and formal basis functions are discussed and their properties are examined. The article notes that the choice of a particular system of basis functions should be determined by the peculiarities of the analyzed signal, as well as the specific character of the problem, and also the opportunity to use these or those methods of analysis.

Keywords: spectra, signal, decomposition coefficients, basis functions.

Наиболее естественной формой представления сигнала является задание закона его изменения как функции времени. В тоже время для анализа и синтеза систем могут быть использованы и другие формы его представления. Любой сигнал можно представить в виде суммы некото-

Бахрушин Александр Петрович — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и вычислительной техники (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: stripylife@yahoo.com.

Бахрушина Галина Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем (Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск), e-mail: galya@netdv.khv.ru

Цой Рудольф Ирсунович — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и вычислительной техники (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: kafedra11@yandex.ru

Че Олег Бонсонович — магистрант 2 года обучения факультета Математики, информационных технологий и техники (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: oleg.che@mail.ru

рых элементарных сигналов. Такое представление возможно при разложении временной функции в ряд по системе базисных функций, что равносильно представлению сигнала в различных системах координат.

Как известно, классическое преобразование Фурье, основанное на использовании экспоненциальной системы базисных функций, является наиболее известным математическим аппаратом для анализа и синтеза сигналов. На основе данного преобразования была разработана теория спектрального анализа сигналов, и именно с помощью экспоненциального базиса были решены многие практические задачи по обработке сигналов. В то же время в ряде случаев применение экспоненциального базиса может оказаться неэффективным при обработке некоторых классов сигналов. Поэтому в настоящее время проводятся интенсивные исследования по разработке новых систем базисных функций для решения конкретных прикладных.

В этой связи для спектральной теории сигналов важно, чтобы любую базисную систему, используемую для разложения сигнала на симметричном интервале, можно было представить в единообразной стандартной форме [1,2]. Все эти формы можно скомбинировать из одних и тех же четных $E(k,x)$ и нечетных $\theta(k,x)$ систем простых функций.

Представим некоторую систему базисных функций $\{B(n,x)\}$ на симметричном интервале $[-X/2, X/2)$, как систему, состоящую из двух простых систем:

$$\{E(k,x)\} \text{ и } \{\theta(k,x)\},$$

где $E(k,\ x)$ и $\theta\ (k,x)$ – четные и нечетные функции, соответственно;
$n = 0, 1, 2, \ldots$ – номер функции в системе $\{B(n,x)\}$;
$k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер функции в системах $E(k,x)$ и $\theta(k,x)$, причем $n = 2k$ для четных функций $E(k,x)$ и $n = 2k-1$ для нечетных функций $\theta(k,x)$.

Как известно, подобная система базисных функций получила название составной системы. Функции, входящие в ее состав, обладают следующими свойствами четности:

$$E(k,x) = E(k,-x) \text{ и } \theta(k,x) = -\theta(k,-x).$$

Запишем разложение сигнала $s(x)$ по составной системе функций:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n)\,B(n,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1(k)\,E(k,x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_2(k)\,\theta(k,x)\ ,$$

где $C_1(k)$ и $C_2(k)$ – спектры при базисных функциях $E(k,x)$ и $\theta(k,x)$, соответственно.

Данное выражение означает, что некоторый сигнал $s(x)$ может быть разделен на четную и нечетную части. Заметим, что в процессе разложения четного сигнала $s_E(x)$ по четной системе функций $\{E(k,x)\}$ одновременно по этой же системе выполняется разложения его каузальной половины на одностороннем интервале $[0,\ X/2)$.

Покажем, что на данном интервале система функций $\{E(k,x)\}$ является также ортогональной.

Действительно, при $k \neq l$ имеем:

$$P_{kl} = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} E(k,x)\ E(l,x)dx =$$

$$\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{0} E(k,x)\ E(l,x)\,dx + \frac{1}{X}\int_{0}^{X/2} E(k,x)\ E(l,x)\,dx = 0.$$

С учетом свойства четности базисных функций получаем:

$$P_{kl} = \frac{2}{X}\int_{0}^{X/2} E(k,x)\ E(l,x)\,dx = 0$$

Аналогичным образом несложно показать, что на том же одностороннем интервале система функций $\{\theta(k,x)\}$ также является ортогональной.

Таким образом, любой произвольный сигнал можно разложить как по составной системе функций

$$\{B(n,x)\} = \{E(k,x),\ \theta(k,x)\}$$

на симметричном интервале $[-X/2, X/2)$, так и по простым системам $\{E(k,x)\}$ или $\{\theta(k,x)\}$ на одностороннем интервале $[0,\ X/2)$.

В качестве примера простых систем функций рассмотрим тригонометрическую систему $\{\sin k\,x\}$ с интервалом ортогональности $[0,\ \pi)$. Сдвинем интервал на $\pi/2$. Тогда с учетом свойств четности получаем:

$$E(k,x) = \sin k\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$\begin{cases} 0, & k = 0, 2, 4, \ldots, \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} 2\cos kx, & k = 1,3,5, \ldots, \end{cases}$$

$$\theta(k,x) = \sin k\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} 2 sin kx, & k = 0, 2, 4, \ldots, \\ 0, & k = 1, 3, 5, \ldots . \end{cases}$$

Каждая из этих систем является полной и ортогональной на интервале $[0, \pi/2)$. В качестве примеров составных систем базисных функций можно привести тригонометрическую систему базисных функций $\{\cos k\,x, \sin k\,x\}$, определенную на интервале $[-\pi, \pi)$ или систему функций Уолша $\{wal\,(n, x)\}$, определенную на интервале $[-1/2, 1/2)$.

Среди наиболее часто используемых составных систем базисных функций особое место занимают периодические системы. В этой связи следует отметить, что простые базисные системы не относятся к классу периодических по той причине, что на правом и левом односторонних интервалах нечетные функции не могут повторяться, а в четной системе могут повторяться лишь некоторые функции четного порядка.

Кроме простых и составных систем базисных функций в спектральной теории сигналов вводятся понятия формальной системы базисных функций.

Формальная система функций определяется следующим образом:

$$\{F(k,x)\} = \left\{\frac{E(k,x) + \theta(k,x)}{2}\right\},$$

где $k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Данная система обладает следующими свойствами:

– является ортогональной и полной на симметричном интервале $[-X/2, X/2)$;

– включает в себя функции как с положительными, так и с отрицательными порядками $-\infty \le k \le \infty$;

– является четной как относительно порядка k, так и относительно координаты x:

$$E(k,x) = E(k,-x) = E(-k,x) \text{ и } \theta(k,x) = -\theta(k,-x) = -\theta(-k,x).$$

– все входящие в систему функции имеют равную мощность:

$$P_k = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} F^2(k,x)\,dx = \frac{1}{X}\int_{0}^{X/2} \eta^2(k,x)\,dx. \qquad (1)$$

С учетом свойства четности функции $F(k,x)$ и $F(-k,x)$ можно представить в виде:

$$F(k,x) = \frac{E(k,x) + \theta(k,x)}{2},$$

$$F(-k,x) = \frac{E(k,x) - \theta(k,x)}{2}.$$

Запишем условие ортогональности для функций $F(k,x)$ и $F(-k,x)$ при всех $k \neq 0$:

$$\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} F(k,x)\,F(-k,x)\,dx =$$

$$\frac{1}{4X}\int_{-X/2}^{X/2} E^2(k,x)\,dx - \frac{1}{4X}\int_{-X/2}^{X/2} \theta^2(k,x)\,dx = 0.$$

Очевидно, что для его выполнения четные и нечетные функции должны иметь одинаковую мощность:

$$\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} E^2(k,x)\,dx = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} \theta^2(k,x)\,dx.$$

Заметим, что такая нормировка находится в полном соответствии со свойством (1):

$$P_k = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} \left[\frac{E(k,x) + \theta(k,x)}{2}\right]^2 dx =$$

$$\frac{1}{4X}\int_{-X/2}^{X/2} E^2(k,x)\,dx + \frac{1}{4X}\int_{-X/2}^{X/2} \theta^2(k,x)\,dx = \frac{P_c}{2},$$

где

$$p_c = \frac{2}{X}\int_{0}^{X/2} \eta^2(k,x)\,dx \quad .$$

Так как $F(0,x) = E(0,x)/2$, то для того, чтобы при $k = 0$ выполнялось условие (1), необходимо установить мощность спектральной составляющей $E(0,x)$ равной $2P_c$.

Тогда:

$$P_0 = \frac{1}{4X}\int_{-X/2}^{X/2} E^2(0,x)\,dx = \frac{P_c}{2} \quad .$$

В заключении следует отметить, что на основе введенных понятий можно сгенерировать бесконечное множество систем базисных функций. Выбор конкретной системы должен определяться особенностями анализируемого сигнала, а также спецификой решаемой задачи (например, анализ фильтров, оценка точности, быстродействия и т.д.), и используемых методов (временные, частотные, операторные и т.д.), а также и других факторов.

В настоящее время наиболее часто используются следующие систем базисных функций [3-5[:

– Системы единичных непрерывных и дискретных функций.

– Системы тригонометрических базисных функций. Эти функции широко используются при частотном представлении сигналов в рядах Фурье.

– Системы комплексных экспоненциальных функций. Эти функции используются в преобразованиях Фурье и Лапласа.

– Системы комплексных дискретных экспоненциальных, базисных функций. Эти функции используются в дискретных преобразованиях Фурье и Лапласа, быстром преобразовании Фурье.

– Полиномиальные системы базисных функций, использующие полиномы Чебышева и Лежандра. Эти функции часто используются для анализа и синтеза цифровых фильтров.

– Двоично – ортогональные системы базисных функций Уолша, Хаара, Радемахера. Эти функции широко используются в вычислительной технике для анализа и синтеза цифровых автоматов.

Список литературы

1. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Советское радио, 1972. 352 с.
2. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 397 с.
3. *Ярославский Л.П.* Некоторые вопросы теории дискретных ортогональных преобразований сигналов // Цифровая обработка сигналов и ее применения / Под ред. Л.П.Ярославского. М.: Наука, 1981. С. 3—71.
4. *Голубов В.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987. 544 с.
5. *Гольденберг Л.М., Матюшкин В.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов. Справочник. М.: Радио и связь,1985. 312 с.

* * *