

УДК 514.74:514.85

С. В. Яняк, И. И. Комиссарова, А. В. Старостин**АНАЛИТИЧЕСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РК-СВЕРЛЕНИЯ ОТВЕРСТИЙ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ**

Треугольник Рело способен вращаться внутри неподвижной квадратной рамки с сохранением между ними четырехточечного контакта. Нами выведены законы движения вершин и центра треугольника Рело в системе координат квадратной рамки. Путем дифференцирования выведены законы скоростей и ускорений. Выведенные законы позволяют моделировать процесс сверления отверстий квадратного поперечного сечения, позволяют оценить неравномерность резания, геометрические и динамические погрешности обработки, могут быть использованы при разработке управляющих программ для станков с ЧПУ.

Ключевые слова: закон движения, РК-сверление, квадратное сечение, стационарная рамка, треугольник Рело.

В 1914 г. инженер Уаттс предложил технологию сверления отверстий квадратного сечения на токарных или сверлильных станках РК-сверлом с применением плавающего патрона и направляющей квадратной рамки. Достоинства «квадратного сверления»: возможность сверления сквозных и даже глухих отверстий квадратного сечения с точностью до 11-го качества одним инструментом. Снижение трудоемкости делает квадратные отверстия более технологичными и позволяет расширить применение в конструкциях квадратных сопряжений. Однако до настоящего времени не изучена кинематика и динамика процесса квадратного сверления.

В процессе РК-сверления использована возможность треугольника Рело (РК) вращаться внутри квадратной рамки со стороны квадрата, равной радиусу РК. При любом угловом положении сохраняется четырехточечный контакт РК и квадрата. Две пары противоположных точек контакта создают две двухсторонние связи с геометрическим замыканием звеньев, лишаящие РК двух степеней свободы, оставляя ему степень свободы вращения. Однозначность положения РК позволяет реализовывать процесс квадратного сверления в сочетании главного вращательного движения РК-сверла (установленного в патроне с двумя степенями свободы смещения оси сверла в

Яняк Сергей Владимирович — кандидат технических наук, доцент
(Вологодский государственный университет), Вологда); e-mail: komirig@yandex.ru

Комиссарова Ирина Игоревна — кандидат технических наук, доцент
(Вологодский государственный университет), Вологда); e-mail: IRIGKOM@mail.ru

Старостин Александр Владимирович — кандидат технических наук, доцент
(Вологодский государственный университет), Вологда); e-mail: alexandr-vstu@yandex.ru

© Яняк С. В., Комиссарова И. И., Старостин А. В., 2015

поперечном направлении для компенсации смещения оси РК относительно оси квадратной рамки) и движения осевой подачи через направляющую неподвижную квадратную рамку. РК-сверло представляет собой стержень, рабочая часть которого в поперечном сечении имеет форму треугольника Рело с тремя стружечными канавками. Главные лезвия расположены от вершин РК к центру в торцевой части сверла.

Четырехточечный контакт в плоскости означает статическую неопределимость задачи (требует использования системы из 4-х уравнений), делает невозможным применения классических методов кинематического анализа.

Главной задачей кинематического моделирования РК-сверления является вывод уравнений (закона) движения вершин и геометрического центра РК в направляющей квадратной рамке. Эти уравнения позволяют вычислить положения любой точки РК в любой момент времени.

Для решения задачи использован принцип адекватной замены кинематически сложного (со скрытыми связями) механизма на составной, статически определимый механизм: состоящий из ведущего вращающегося звена на плавающем (с двумя степенями свободы) шарнире, двух рычагов-шатунов и двух ползунов (рис. 1). В зависимости от углового положения ведущего звена (через каждые 30°) меняется расположение ползунов (для скольжения вершины РК по стороне квадрата). Любой из трех вариантов составного механизма является статически определимым и имеет единственное решение (уравнение).

Несмотря на внешнее усложнение механизма, наличие в нем кинематически простых звеньев позволяет сделать вывод уравнений в виде алгебраической суммы проекций характерных точек контакта звеньев на выбранные оси координат: от геометрического центра квадрата в направлении сторон квадрата (ось X-вправо, ось Y-вверх). Закон движения получил многоступенчатый вид с изменением в одной из проекций попеременно через каждые 30° .

Аналитический геометрический закон движения верхней вершины РК относительно центра стационарной квадратной рамки со стороной R в зависимости от угла поворота ωt с отсчетом против часовой стрелки от оси Y в интервале от $0^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ$:

$$0^\circ \leq \omega t \leq 30^\circ: \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2}(1 - \cos \omega t - \sqrt{3} \sin \omega t) \\ Y_1 = \frac{R}{2} \end{cases}$$

$$30^\circ \leq \omega t \leq 60^\circ: \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2}(1 - \cos \omega t + \sqrt{3} \sin \omega t) \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 - \sqrt{3} \cos \omega t - \sin \omega t) \end{cases}$$

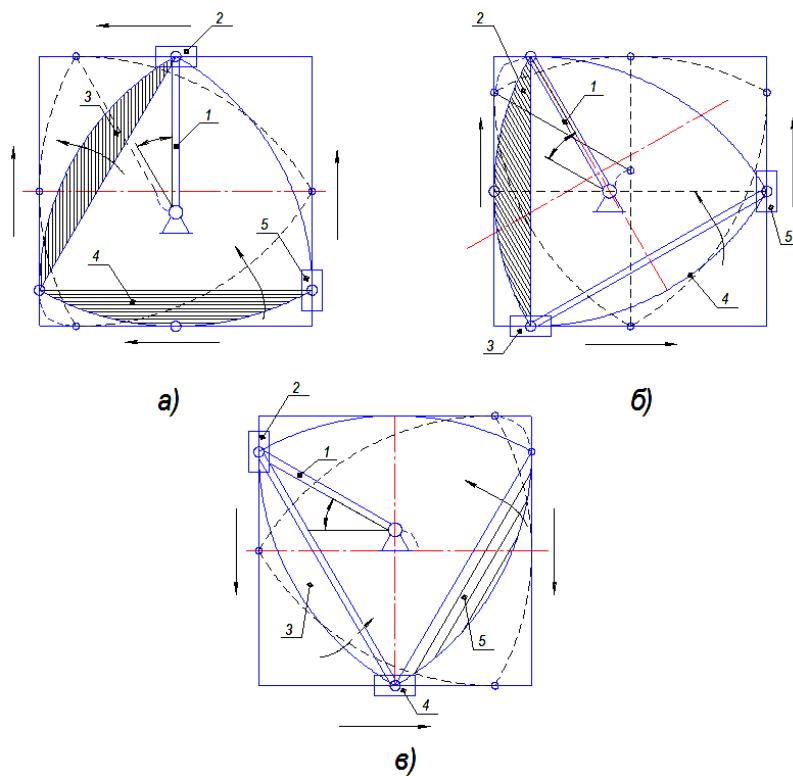


Рис. 1. Составные рычажно-ползунные механизмы:
 а) – $0^\circ \leq \omega t \leq 30^\circ$; б) – $30^\circ \leq \omega t \leq 60^\circ$; в) – $60^\circ \leq \omega t \leq 90^\circ$

$$\begin{aligned}
 60^\circ \leq \omega t \leq 90^\circ: & \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2} \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 - \sqrt{3}\cos \omega t - \sin \omega t) \end{cases} \\
 90^\circ \leq \omega t \leq 120^\circ: & \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2} \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 - \sin \omega t + \sqrt{3}\cos \omega t) \end{cases} \\
 120^\circ \leq \omega t \leq 150^\circ: & \quad \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2}(1 - \sqrt{3}\sin \omega t + \cos \omega t) \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 - \sin \omega t + \sqrt{3}\cos \omega t) \end{cases} \\
 150^\circ \leq \omega t \leq 180^\circ: & \quad \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2}(1 - \sqrt{3}\sin \omega t + \cos \omega t) \\ Y_1 = -\frac{R}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$180^\circ \leq \omega t \leq 210^\circ: \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2}(1 + \cos \omega t + \sqrt{3} \sin \omega t) \\ Y_1 = -\frac{R}{2} \end{cases}$$

$$210^\circ \leq \omega t \leq 240^\circ: \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2}(1 + \cos \omega t + \sqrt{3} \sin \omega t) \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3} \cos \omega t + \sin \omega t) \end{cases}$$

$$240^\circ \leq \omega t \leq 270^\circ: \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2} \\ Y_1 = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3} \cos \omega t + \sin \omega t) \end{cases}$$

$$270^\circ \leq \omega t \leq 300^\circ: \begin{cases} X_1 = \frac{R}{2} \\ Y_1 = -\frac{R}{2}(1 + \sin \omega t - \sqrt{3} \cos \omega t) \end{cases}$$

$$300^\circ \leq \omega t \leq 330^\circ: \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2}(1 + \sqrt{3} \sin \omega t - \cos \omega t) \\ Y_1 = -\frac{R}{2}(1 + \sin \omega t - \sqrt{3} \cos \omega t) \end{cases}$$

$$330^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ: \begin{cases} X_1 = -\frac{R}{2}(1 + \sqrt{3} \sin \omega t - \cos \omega t) \\ Y_1 = \frac{R}{2} \end{cases}$$

По выведенным зависимостям в качестве проверки построен график перемещения вершин РК относительно центра рамки (рис. 2).

Закон движения центра РК-профиля O_2 относительно центра стационарной квадратной рамки со стороной R в системе координат $X - Y$ в зависимости от угла поворота ωt ведущего звена с отсчетом от оси Y в интервале $0^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ$:

$$0^\circ \leq \omega t \leq 30^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} \left(\cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = \frac{R}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} R \cos \omega t \end{cases}$$

$$30^\circ \leq \omega t \leq 60^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} \left(\cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right) \end{cases}$$

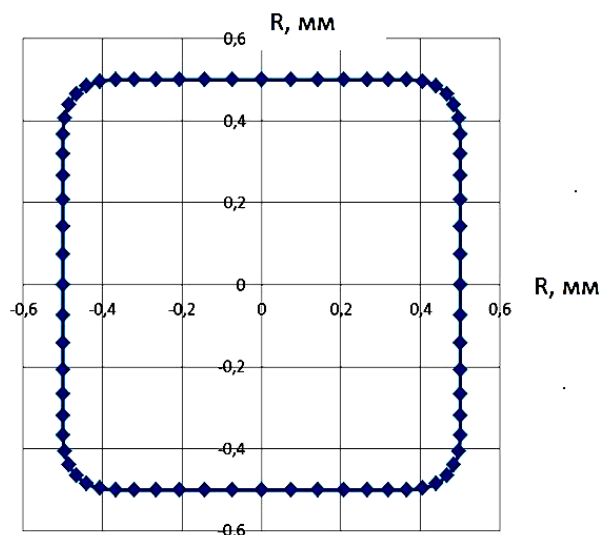


Рис. 2. Траектория движения вершин РК

$$60^\circ \leq \omega t \leq 90^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}R \sin \omega t \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right) \end{cases}$$

$$90^\circ \leq \omega t \leq 120^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}R \sin \omega t \\ Y_2 = -\frac{R}{2} \left(\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right); \end{cases}$$

$$120^\circ \leq \omega t \leq 150^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} \left(-\cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = -\frac{R}{2} \left(\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right) \end{cases}$$

$$150^\circ \leq \omega t \leq 180^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = -\frac{R}{2} \left(-\cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = -\frac{R}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}R \cos \omega t \end{cases}$$

$$180^\circ \leq \omega t \leq 210^\circ: \quad O_2 \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} \left(-\cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = -\frac{R}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}R \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
210^\circ \leq \omega t \leq 240^\circ: \quad O_2 & \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} \left(-\cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t + 1 \right) \end{cases} \\
240^\circ \leq \omega t \leq 270^\circ: \quad O_2 & \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} R \sin \omega t \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t + 1 \right) \end{cases} \\
270^\circ \leq \omega t \leq 300^\circ: \quad O_2 & \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} R \sin \omega t \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(-\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right); \end{cases} \\
300^\circ \leq \omega t \leq 330^\circ: \quad O_2 & \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} \left(\cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = \frac{R}{2} \left(-\sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \omega t - 1 \right) \end{cases} \\
330^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ: \quad O_2 & \begin{cases} X_2 = \frac{R}{2} \left(\cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \omega t - 1 \right) \\ Y_2 = \frac{R}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} R \cos \omega t \end{cases}
\end{aligned}$$

По приведенным выше уравнениям построен график перемещения геометрического центра РК относительно центра рамки:

Геометрический центр РК вращается по часовой стрелке (в противоположном направлении по отношению к направлению вершин РК) с утроенной частотой вращения: $-3\omega t$. Форма траектории довольно близка к окружности (и визуально, и математически: при сравнении уравнений окружности с любой частью составного закона движения). Максимальное отклонение круговой траектории от истинной криволинейной не превышает $0,3 \% R$ (рис. 3).

Угол при вершине РК-профиля (по касательным) равен 120° , поэтому при обкатывании внутри квадратной рамки с углом 90° каждая вершина РК, кроме скольжения по стороне квадрата ($60 \% R$), в углах квадрата совершает движение по траектории типа гиперболы ($20 \% R$ в каждом углу). Величина отклонения вершины РК от вершины квадрата (рис. 4) составляет: на сторону $\Delta X = \Delta Y = R (1 - \cos 15^\circ) = 0,0341 \cdot R$, по диагонали квадрата: $\Delta = \sqrt{2} R (1 - \cos 15^\circ) \approx 0,0482 \cdot R$. Отклонение относительно небольшое, в реальной конструкции может быть полезным, т.к. скругление уменьшает концентрацию напряжений в вершинах квадратного отверстия.

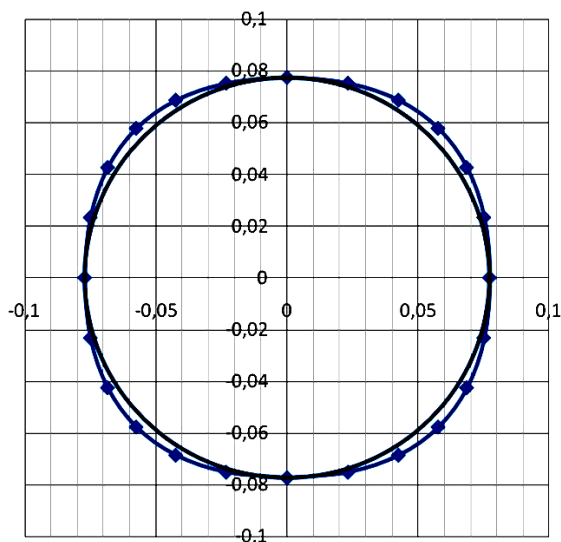


Рис. 3. Замена вычисленной траектории оси РК-сверла на круговую

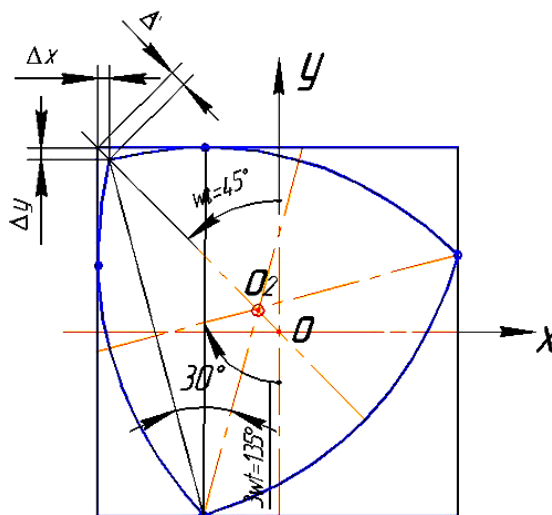


Рис. 4. Отклонение вершины РК-профиля от вершины квадрата

При выполнении принудительного вращения геометрического центра РК без направляющей квадратной рамки по круговой траектории на стороне квадрата образуется небольшое отклонение (вогнутость) величиной $0,77 \%R$: 200 мкм для стороны квадрата 25 мм, что соответствует 12-му качеству точности (рис. 5).

Главные лезвия в торцевой части РК-сверла соединяют вершины и геометрический центр РК.

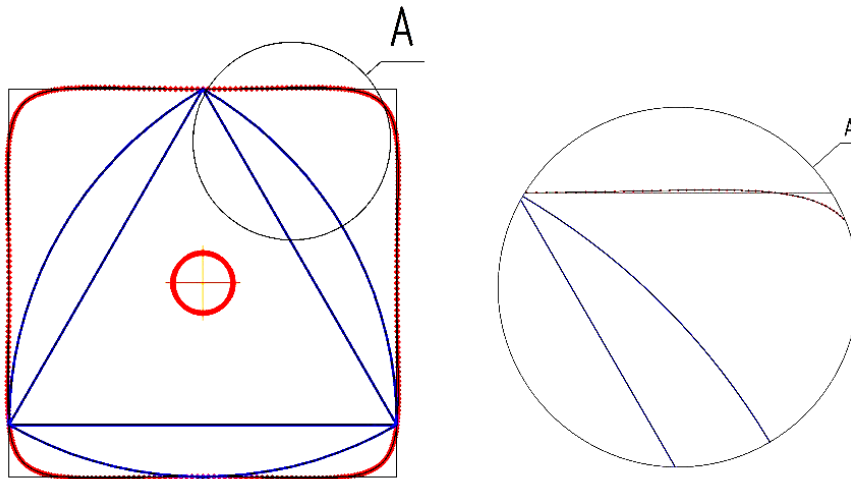


Рис. 5. Траектория движения вершин РК-сверла при круговом движении его центра

Крайние точки лезвия совершают разнонаправленные движения (на периферии – против часовой стрелки, на оси сверла – по часовой стрелке). Это приводит к тому, что в районе вершины квадрата часть лезвия РК-сверла выполняет неправильное движение (спинкой вперед). Закон движения позволяет вычислить длину участка обратного движения (до 27 % длины лезвия) в зависимости от угла поворота ωt (рис. 6). На участках в районе вершин квадрата происходит накопление упругой деформации и увеличение осевой силы резания.

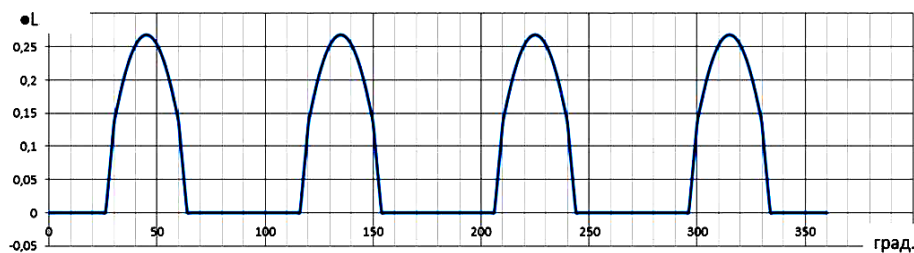


Рис. 6. График для определения доли лезвия, которая движется противоположно главному движению

Дифференцирование закона движения по времени t или по углу поворота ωt дает уравнения (закон) скоростей.

Дифференцирование закона скоростей позволяет получить закон ускорений. Из-за большого объема эти законы не приведены. Анализ показал пульсирующее изменение скорости и ускорение вершин РК, которое, однако, меньше, чем при фрезеровании.

Заключение. С учетом результатов математического моделирования выполнено кинематическое и динамическое обоснование процесса РК-сверления, разработана конструкция РК-сверла, разработана управляющая программа для сверления отверстий квадратного сечения на двухшпиндельном токарном центре.

* * *

Ianiak Sergey V., Komissarova Irina I., Starostin Alexandr V.
ANALYTICAL MATHEMATICAL SIMULATION OF RK-WIMBLING WITH SQUARE SECTION
(Vologda State University, Vologda)

The Reuleaux triangle is able to rotate within a stationary square frame maintaining four-point contact between them. We have worked out laws of motion of the vertex and the centre of the Reuleaux triangle in the coordinate system of the square frame. By differentiating we have worked out laws of velocities and acceleration. Worked out laws let us simulate the process of wimbling with square cross section, they let us estimate uneven cutting, geometric and dynamic processing errors, they can be used in control programme development for machines with CNC.

Keywords: law of motion, RK-wimbling, square section, stationary frame, Reuleaux triangle.

* * *