

УДК 512.54

Б. Е. Фишман**О РАСШИРЕНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ
РИСОВСКОЙ ПОЛУГРУППЫ МАТРИЧНОГО ТИПА**

Рассмотрено расширение рисовской полугруппы матричного типа над множеством трёх элементов $\{-1, 0, 1\}$ с единичным по модулю определителем, полученное за счёт умножения всех матриц полугруппы на число. Показано, что такое расширение означает появление в составе расширенной полугруппы матриц с мнимыми матричными элементами $-i$ и i . Полученное дополнение исходной полугруппы не содержит абелевых подгрупп.

Ключевые слова: рисовская полугруппа матричного типа, расширение состава полугруппы, умножение матриц полугруппы на число, единичный по модулю определитель, абелевы подгруппы.

Введение

Рассмотрим введённое в статье [2] множество $\{A\}$, элементы которого (архоны) определяются следующими условиями:

- 1) они представимы в виде матриц 2×2 ;
- 2) они имеют матричные элементы, содержащиеся во множестве $\{-1, 0, 1\}$;
- 3) они удовлетворяют условию $|\det A| = 1$.

Основной операцией, выполнимой на множестве $\{A\}$, является умножение матриц. Пусть $\{N\}$ — это расширение множества $\{A\}$, к которому приводит умножение его элементов на некоторое число, причём все полученные элементы удовлетворяют первому и третьему условиям из приведённых выше.

При умножении матрицы 2×2 на число λ определитель полученной матрицы в λ^2 раз больше, чем определитель исходной матрицы [2]. Учитывая третье условие, можно записать следующее ограничение для допустимых значений λ , приводящих к расширению множества $\{A\}$ до множества $\{N\}$:

$$|\lambda^2| = 1. \quad (1)$$

Отсюда следует, что имеются только четыре допустимых значения λ :

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = i; \quad \lambda_4 = -i. \quad (2)$$

Фишман Борис Ентильевич — кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, Биробиджан); e-mail: bef942@mail.ru.

© Фишман Б. Е., 2019

Таким образом, элементы расширенного множества $\{\mathcal{N}\}$ определяются следующими условиями:

- 1) они представимы в виде матриц 2×2 ;
- 2) они имеют матричные элементы, содержащиеся во множествах $\{-1, 0, 1\}$ или $\{-i, 0, +i\}$;
- 3) они удовлетворяют условию $|\det A| = 1$.

Рассмотрим компоненты расширенного множества $\{\mathcal{N}\}$. Если символ $\{(A)_{\lambda_i}\}$ обозначает множество элементов, которое получено в результате умножения элементов множества $\{A\}$ на число λ_i , то

$$\{\mathcal{N}\} = \{(A)_{\lambda_1}\} \cup \{(A)_{\lambda_2}\} \cup \{(A)_{\lambda_3}\} \cup \{(A)_{\lambda_4}\}. \quad (3)$$

1. Расширение множества $\{A\}$, обязанное умножению элементов на λ_1 и λ_2

В формуле (3) учтено, что умножение элементов множества $\{A\}$ на λ_1 осуществляет тождественное преобразование $\{(A)_{\lambda_1}\} \equiv \{A\}$.

Из определения элементов множества архонов $\{A\}$, данного в [2], можно получить следующий результат умножения элементов этого множества на λ_2 :

$$\begin{cases} (\bar{A}_1^+)_{\lambda_2} = (\bar{A}_1^+) \times \lambda_2 = \bar{A}_3^+, & (\bar{A}_2^+)_{\lambda_2} = (\bar{A}_2^+) \times \lambda_2 = \bar{A}_4^+, \\ (\bar{A}_3^+)_{\lambda_2} = (\bar{A}_3^+) \times \lambda_2 = \bar{A}_1^+, & (\bar{A}_4^+)_{\lambda_2} = (\bar{A}_4^+) \times \lambda_2 = \bar{A}_2^+, \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} (\bar{A}_1^-)_{\lambda_2} = (\bar{A}_1^-) \times \lambda_2 = \bar{A}_3^-, & (\bar{A}_2^-)_{\lambda_2} = (\bar{A}_2^-) \times \lambda_2 = \bar{A}_4^-, \\ (\bar{A}_3^-)_{\lambda_2} = (\bar{A}_3^-) \times \lambda_2 = \bar{A}_1^-, & (\bar{A}_4^-)_{\lambda_2} = (\bar{A}_4^-) \times \lambda_2 = \bar{A}_2^-, \end{cases} \quad (4b)$$

$$\begin{cases} (\bar{A}_1^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_1^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_5^+(1), & (\bar{A}_2^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_2^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_6^+(1), \\ (\bar{A}_3^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_3^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_7^+(1), & (\bar{A}_4^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_4^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_8^+(1), \\ (\bar{A}_5^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_5^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_1^+(1), & (\bar{A}_6^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_6^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_2^+(1), \\ (\bar{A}_7^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_7^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_3^+(1), & (\bar{A}_8^+(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_8^+(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_4^+(1), \end{cases} \quad (4в)$$

$$\begin{cases} (\bar{A}_1^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_1^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_5^+(2), & (\bar{A}_2^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_2^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_6^+(2), \\ (\bar{A}_3^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_3^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_7^+(2), & (\bar{A}_4^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_4^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_8^+(2), \\ (\bar{A}_5^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_5^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_1^+(2), & (\bar{A}_6^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_6^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_2^+(2), \\ (\bar{A}_7^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_7^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_3^+(2), & (\bar{A}_8^+(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_8^+(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_4^+(2), \end{cases} \quad (4г)$$

$$\begin{cases} (\bar{A}_1^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_1^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_5^-(1), & (\bar{A}_2^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_2^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_6^-(1), \\ (\bar{A}_3^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_3^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_7^-(1), & (\bar{A}_4^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_4^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_8^-(1), \\ (\bar{A}_5^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_5^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_1^-(1), & (\bar{A}_6^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_6^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_2^-(1), \\ (\bar{A}_7^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_7^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_3^-(1), & (\bar{A}_8^-(1))_{\lambda_2} = \bar{A}_8^-(1) \times \lambda_2 = \bar{A}_4^-(1), \end{cases} \quad (4д)$$

$$\begin{cases} (\bar{A}_1(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_1(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_5(2), & (\bar{A}_2(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_2(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_6(2), \\ (\bar{A}_3(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_3(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_7(2), & (\bar{A}_4(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_4(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_8(2), \\ (\bar{A}_5(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_5(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_1(2), & (\bar{A}_6(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_6(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_2(2), \\ (\bar{A}_7(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_7(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_3(2), & (\bar{A}_8(2))_{\lambda_2} = \bar{A}_8(2) \times \lambda_2 = \bar{A}_4(2), \end{cases} \quad (4e)$$

Таким образом, при умножении $\{A\}$ на λ_2 новые элементы не появляются, но изменяется порядок элементов в кортежах $\{\bar{A}^+\}$, $\{\bar{A}^-\}$, $\{\bar{A}^+(1)\}$, $\{\bar{A}^-(1)\}$, $\{\bar{A}^+(2)\}$ и $\{\bar{A}^-(2)\}$. При этом не формируются новые абелевы подгруппы.

2. Расширение множества $\{A\}$, обязанное умножению элементов на λ_3 и λ_4

Ясно, что умножение элементов множества $\{A\}$ на λ_3 и λ_4 приводит к элементам, равным или $-i$, или 0 , или $+i$. Обозначим символом $\{B\}$ множество бихонов, которое является результатом умножения множества архонов $\{A\}$ на λ_3 . Так же, как было установлено в [2] для множества архонов $\{A\}$, можно показать, что в составе множества $\{B\}$ содержатся подмножества $\{\bar{B}\}$ и $\{\bar{B}^+\}$, причём у подмножества бихонов $\{\bar{B}\}$ два матричных элемента равны нулю, а у подмножества бихонов $\{\bar{B}^+\}$ один матричный элемент равен нулю.

Подмножество бихонов $\{\bar{B}^+\}$, в свою очередь, содержит два подмножества $\{\bar{B}^+\}$ и $\{\bar{B}^-\}$, элементы которых определяются значением $\det \bar{B} = +1$ и $\det \bar{B} = -1$ соответственно.

Определим сначала 4 элемента подмножества бихонов $\{\bar{B}^+\}$

$$\bar{B}_1^+ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_3^+ = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_4^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если при построении визуальных образов элементов этого подмножества использовать следующее правило: первая строка матрицы символически отображена сплошным вектором, а вторая строка – пунктирным вектором, то получим образы, представленные на рисунке 1.

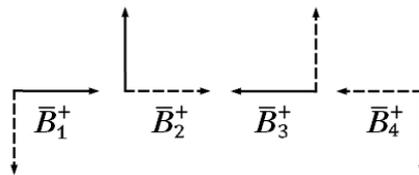


Рис. 1. Визуальное представление¹ элементов подмножества $\{\bar{B}^+\}$

¹ Все визуальные представления построены без применения специальных компьютерных программ.

Как и в предыдущих статьях [2] и [3], использовано следующее правило: первая строка матрицы символически отображена сплошным вектором, а вторая строка – пунктирным вектором. Заметим, что на рисунке 1 (и на всех последующих рисунках) единицей по осям абсцисс и ординат является i . Поскольку на рисунке представлены абстрактные образы элементов рассматриваемого подмножества, то смысловая интерпретация таких образов не имеет физического смысла¹.

Из определения элементов множества $\{A\}$, данного в [2], можно установить, что элементы подмножества бихонов $\{B^+\}$ образуются умножением элементов подмножества архонов $\{A^-\}$ на λ_3 :

$$\begin{cases} \bar{B}_1^+ = (\bar{A}_1^-) \times \lambda_3 = (\bar{A}_1^-)_{\lambda_3}, & \bar{B}_2^+ = (\bar{A}_2^-) \times \lambda_3 = (\bar{A}_2^-)_{\lambda_3}, \\ \bar{B}_3^+ = (\bar{A}_3^-) \times \lambda_3 = (\bar{A}_3^-)_{\lambda_3}, & \bar{B}_4^+ = (\bar{A}_4^-) \times \lambda_3 = (\bar{A}_4^-)_{\lambda_3}. \end{cases} \quad (6a)$$

Теперь определим 4 элемента подмножества $\{B^-\}$:

$$\bar{B}_1^- = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2^- = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_3^- = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_4^- = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Визуальные образы элементов этого подмножества представлены на рисунке 2.

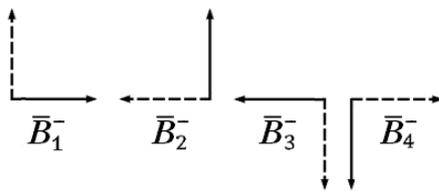


Рис. 2. Визуальное представление элементов подмножества $\{B^-\}$.

Можно показать, что элементы данного подмножества образуются умножением элементов подмножества $\{A^+\}$ на λ_3 :

$$\begin{cases} \bar{B}_1^- = (\bar{A}_1^+) \times \lambda_3 = (\bar{A}_1^+)_{\lambda_3}, & \bar{B}_2^- = (\bar{A}_2^+) \times \lambda_3 = (\bar{A}_2^+)_{\lambda_3}, \\ \bar{B}_3^- = (\bar{A}_3^+) \times \lambda_3 = (\bar{A}_3^+)_{\lambda_3}, & \bar{B}_4^- = (\bar{A}_4^+) \times \lambda_3 = (\bar{A}_4^+)_{\lambda_3}. \end{cases} \quad (6б)$$

Теперь можно рассмотреть подмножество $\{B\}$. Его элементы – это матрицы 2×2 , которые содержат один матричный элемент, равный нулю. Подмножество $\{B\}$ является объединением двух подмножеств $\{B^+\}$ и $\{B^-\}$, элементы которых определяются значением $\det \bar{B} = +1$ и $\det \bar{B} = -1$ соответственно.

¹ Вместе с тем рисунке 1 ясно указывает на то, что подмножество $\{B^+\}$ является кортежем, в котором порядок следования элементов задаётся следующим правилом. Первым считается элемент с ориентированным вправо вектором, условно представляющим первую строку матрицы \bar{B}_1^+ . Номера всех последующих элементов определяются кратностью поворота этого вектора против часовой стрелки на дискретный угол $\pi/2$.

Анализируя подмножество бихонов $\{\mathbf{B}^+\}$ аналогично тому, как было выполнено в [2] по отношению к подмножеству $\{\mathbf{A}^+\}$, можно показать, что в состав подмножества $\{\mathbf{B}^+\}$ входят два подмножества $\{\mathbf{B}^+(1)\}$ и $\{\mathbf{B}^+(2)\}$. Принадлежность любой рассматриваемой матрицы 2×2 к одному из этих подмножеств определяется знаком её классификационной характеристики p , где

$$p = a_{1,1} \times a_{2,1} + a_{1,2} \times a_{2,2}, \tag{8}$$

а $a_{i,j}$ – матричный элемент рассматриваемой матрицы 2×2 , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца.

Будем считать, что конкретная матрица 2×2 принадлежит подмножеству бихонов $\{\mathbf{B}^+(1)\}$, если для неё значение $p = +1$. Если же для матрицы 2×2 значение $p = -1$, то будем считать, что эта матрица принадлежит подмножеству бихонов $\{\mathbf{B}^+(2)\}$.

Рассмотрим 8 элементов подмножества $\{\mathbf{B}^+(1)\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_1^+(1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2^+(1) = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_3^+(1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_4^+(1) = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_5^+(1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_6^+(1) = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_7^+(1) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_8^+(1) = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{9a}$$

Визуальные образы элементов подмножества $\{\mathbf{B}^+(1)\}$ представлены на рисунке 3.

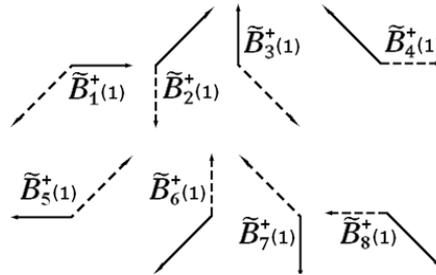


Рис. 3. Визуальное представление элементов подмножества $\{\mathbf{B}^+(1)\}$

Можно показать, что элементы данного подмножества бихонов $\{\mathbf{B}^+(1)\}$ образуются умножением элементов подмножества архонов $\{\mathbf{A}^-(2)\}$, определённого в [2], на λ_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_1^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_1^-(2)) \times \lambda_3, \quad \tilde{\mathbf{B}}_2^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_2^-(2)) \times \lambda_3, \\ \tilde{\mathbf{B}}_3^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_3^-(2)) \times \lambda_3, \quad \tilde{\mathbf{B}}_4^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_4^-(2)) \times \lambda_3, \\ \tilde{\mathbf{B}}_5^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_5^-(2)) \times \lambda_3, \quad \tilde{\mathbf{B}}_6^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_6^-(2)) \times \lambda_3, \\ \tilde{\mathbf{B}}_7^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_7^-(2)) \times \lambda_3, \quad \tilde{\mathbf{B}}_8^+(1) = (\tilde{\mathbf{A}}_8^-(2)) \times \lambda_3. \end{array} \right. \tag{6b}$$

Теперь рассмотрим 8 элементов подмножества бихонов $\{\mathbf{B}^+(2)\}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{B}_1^+(2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_2^+(2) = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_3^+(2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & i \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_4^+(2) = \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_5^+(2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_6^+(2) = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_7^+(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -i \end{pmatrix}, & \mathbf{B}_8^+(2) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (96)$$

Визуальные образы элементов подмножества бихонов $\{\mathbf{B}^+(2)\}$ представлены на рисунке 4.

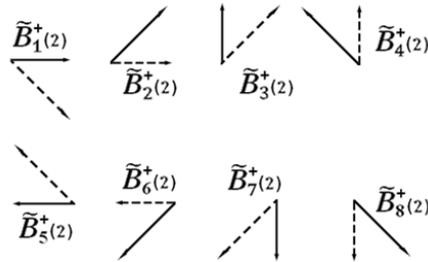


Рис. 4. Визуальное представление элементов подмножества $\{\mathbf{B}^+(2)\}$

Можно показать, что элементы подмножества бихонов $\{\mathbf{B}^+(2)\}$ образуются умножением элементов подмножества архонов $\{\mathbf{A}^-(1)\}$, определённого в [2], на λ_3 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{B}_1^+(2) = (\mathbf{A}_1^-(1)) \times \lambda_3, & \mathbf{B}_2^+(2) = (\mathbf{A}_2^-(1)) \times \lambda_3, \\ \mathbf{B}_3^+(2) = (\mathbf{A}_3^-(1)) \times \lambda_3, & \mathbf{B}_4^+(2) = (\mathbf{A}_4^-(1)) \times \lambda_3, \\ \mathbf{B}_5^+(2) = (\mathbf{A}_5^-(1)) \times \lambda_3, & \mathbf{B}_6^+(2) = (\mathbf{A}_6^-(1)) \times \lambda_3, \\ \mathbf{B}_7^+(2) = (\mathbf{A}_7^-(1)) \times \lambda_3, & \mathbf{B}_8^+(2) = (\mathbf{A}_8^-(1)) \times \lambda_3. \end{array} \right. \quad (6г)$$

Анализируя подмножество бихонов $\{\mathbf{B}^-\}$, можно показать, что оно так же, как и подмножество бихонов $\{\mathbf{B}^+\}$, содержит два подмножества $\{\mathbf{B}^-(1)\}$ и $\{\mathbf{B}^-(2)\}$. При этом принадлежность какой-либо матрицы 2×2 к одному из указанных подмножеств определяется знаком p – классификационной характеристики рассматриваемой матрицы.

Рассмотрим 8 элементов подмножества бихонов $\{\mathbf{B}^-(1)\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{B}}_1^-(1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2^-(1) = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_3^-(1) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_4^-(1) = \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_5^-(1) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_6^-(1) = \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_7^-(1) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_8^-(1) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (9в)$$

Визуальные образы элементов подмножества бихонов $\{\mathcal{B}^-(1)\}$ представлены на рисунке 5.

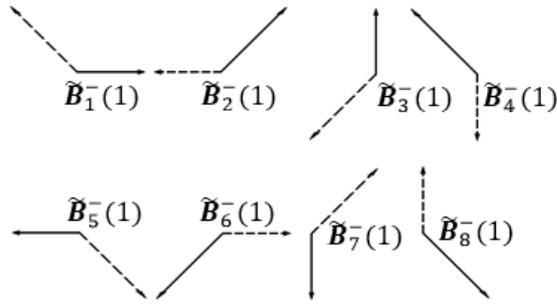


Рис. 5. Визуальное представление элементов подмножества $\{\mathcal{B}^-(1)\}$

Можно показать, что элементы подмножества бихонов $\{\mathcal{B}^-(1)\}$ образуются умножением элементов подмножества архонов $\{\mathcal{A}^+(2)\}$, определённого в [2], на λ_3 :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1^-(1) = (\mathcal{A}_1^+(2)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_2^-(1) = (\mathcal{A}_2^+(2)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_3^-(1) = (\mathcal{A}_3^+(2)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_4^-(1) = (\mathcal{A}_4^+(2)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_5^-(1) = (\mathcal{A}_5^+(2)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_6^-(1) = (\mathcal{A}_6^+(2)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_7^-(1) = (\mathcal{A}_7^+(2)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_8^-(1) = (\mathcal{A}_8^+(2)) \times \lambda_3. \end{cases} \quad (6д)$$

Теперь рассмотрим 8 элементов подмножества бихонов $\{\mathcal{B}^-(2)\}$:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{B}}_1^-(2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_2^-(2) = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_3^-(2) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_4^-(2) = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{B}}_5^-(2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_6^-(2) = \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_7^-(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -i \end{pmatrix}, \tilde{\mathcal{B}}_8^-(2) = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (9г)$$

Визуальные образы элементов подмножества бихонов $\{\mathcal{B}^-(2)\}$ представлены на рисунке 6.

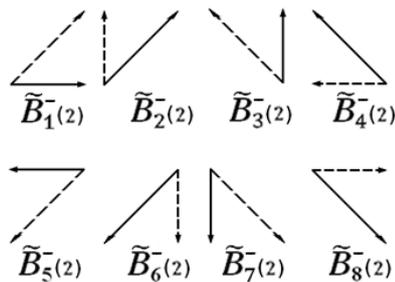


Рис. 6. Визуальное представление элементов подмножества $\{\mathcal{B}^-(2)\}$.

Можно показать, что элементы подмножества бихонов $\{\mathcal{B}^-(2)\}$ образуются умножением элементов подмножества архонов $\{\mathcal{A}^+(1)\}$, определённого в [2], на λ_3 :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1^-(2) = (\mathcal{A}_1^+(1)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_2^-(2) = (\mathcal{A}_2^+(1)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_3^-(2) = (\mathcal{A}_3^+(1)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_4^-(2) = (\mathcal{A}_4^+(1)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_5^-(2) = (\mathcal{A}_5^+(1)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_6^-(2) = (\mathcal{A}_6^+(1)) \times \lambda_3, \\ \mathcal{B}_7^-(2) = (\mathcal{A}_7^+(1)) \times \lambda_3, & \mathcal{B}_8^-(2) = (\mathcal{A}_8^+(1)) \times \lambda_3. \end{cases} \quad (6e)$$

Из определения элементов множества архонов $\{\mathcal{A}\}$, данного в [2], можно получить следующий результат умножения элементов этого множества на λ_4 :

$$\begin{cases} (\overline{\mathcal{A}}_1^+)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_1^+) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_2^-, & (\overline{\mathcal{A}}_2^+)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_2^+) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_4^-, \\ (\overline{\mathcal{A}}_3^+)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_3^+) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_1^-, & (\overline{\mathcal{A}}_4^+)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_4^+) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_2^-, \end{cases} \quad (10a)$$

$$\begin{cases} (\overline{\mathcal{A}}_1^-)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_1^-) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_3^+, & (\overline{\mathcal{A}}_2^-)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_2^-) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_4^+, \\ (\overline{\mathcal{A}}_3^-)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_3^-) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_1^+, & (\overline{\mathcal{A}}_4^-)_{\lambda_4} = (\overline{\mathcal{A}}_4^-) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_2^+, \end{cases} \quad (10б)$$

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_1^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_1^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_5^-(2), & (\mathcal{A}_2^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_2^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_6^-(2), \\ (\mathcal{A}_3^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_3^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_7^-(2), & (\mathcal{A}_4^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_4^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_8^-(2), \\ (\mathcal{A}_5^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_5^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_1^-(2), & (\mathcal{A}_6^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_6^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_2^-(2), \\ (\mathcal{A}_7^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_7^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_3^-(2), & (\mathcal{A}_8^+(1))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_8^+(1) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_4^-(2), \end{cases} \quad (10в)$$

$$\begin{cases} (\mathcal{A}_1^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_1^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_5^-(1), & (\mathcal{A}_2^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_2^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_6^-(1), \\ (\mathcal{A}_3^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_3^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_7^-(1), & (\mathcal{A}_4^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_4^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_8^-(1), \\ (\mathcal{A}_5^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_5^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_1^-(1), & (\mathcal{A}_6^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_6^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_2^-(1), \\ (\mathcal{A}_7^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_7^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_3^-(1), & (\mathcal{A}_8^+(2))_{\lambda_4} = \mathcal{A}_8^+(2) \times \lambda_4 = \mathcal{B}_4^-(1), \end{cases} \quad (10г)$$

$$\begin{cases} (\overline{\mathcal{A}}_1^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_1^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_5^+(2), & (\overline{\mathcal{A}}_2^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_2^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_6^+(2), \\ (\overline{\mathcal{A}}_3^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_3^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_7^+(2), & (\overline{\mathcal{A}}_4^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_4^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_8^+(2), \\ (\overline{\mathcal{A}}_5^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_5^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_1^+(2), & (\overline{\mathcal{A}}_6^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_6^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_2^+(2), \\ (\overline{\mathcal{A}}_7^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_7^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_3^+(2), & (\overline{\mathcal{A}}_8^-(1))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_8^-(1) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_4^+(2), \end{cases} \quad (10д)$$

$$\begin{cases} (\overline{\mathcal{A}}_1^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_1^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_5^+(1), & (\overline{\mathcal{A}}_2^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_2^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_6^+(1), \\ (\overline{\mathcal{A}}_3^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_3^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_7^+(1), & (\overline{\mathcal{A}}_4^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_4^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_8^+(1), \\ (\overline{\mathcal{A}}_5^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_5^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_1^+(1), & (\overline{\mathcal{A}}_6^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_6^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_2^+(1), \\ (\overline{\mathcal{A}}_7^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_7^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_3^+(1), & (\overline{\mathcal{A}}_8^-(2))_{\lambda_4} = \overline{\mathcal{A}}_8^-(2) \times \lambda_4 = \overline{\mathcal{B}}_4^+(1), \end{cases} \quad (10е)$$

Сравним формулы (6а) с формулами (10а), формулы (6б) с формулами (10б), ... , формулы (6е) с формулами (10е). Можно определить, что результаты умножения $\{A\}$ на λ_3 содержат те же элементы (бихоны), что и результаты умножения $\{A\}$ на λ_4 . Различия между результатами умножения сводятся к тому, что изменяется порядок следования элементов в кортежах $\{\bar{B}^+\}$, $\{\bar{B}^-\}$, $\{\bar{B}^+(1)\}$, $\{\bar{B}^-(1)\}$, $\{\bar{B}^+(2)\}$ и $\{\bar{B}^-(2)\}$.

Заключение

Выполненное расширение рисовской полугруппы матричного типа $\{A\}$ привело к рисовской полугруппе матричного типа $\{B\}$. Эта полугруппа $\{B\}$ не содержит абелевых подгрупп, поскольку в её составе отсутствует нейтральный элемент [1].

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие вопросы для дальнейшего исследования:

- Какое множество элементов полугруппы $\{A\}$ нужно объединить с полугруппой $\{B\}$, чтобы в полученной полугруппе содержались абелевы подгруппы?
- Сколько и каких новых абелевых подгрупп имеется в объединении $\{B\}$ с $\{A\}$?
- К каким семействам принадлежат новые абелевы подгруппы по признаку генетического родства?

Разрешение указанных вопросов будет задачей дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. М.: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
2. Фишман Б. Е. Абелевы подгруппы в рисовской полугруппе матричного типа // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. № 4 (17). 2014. С. 92 – 103.
3. Фишман Б. Е. О составе и классификации абелевых подгрупп, содержащихся в рисовской полугруппе матричного типа // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. № 3 (20). 2015. С. 101 – 109.

* * *

Fishman Boris E.
ABOUT THE EXPANSION OF REAL REESE'S SEMIGROUP OF THE MATRIX TYPE
 (Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan)

The extension of the Rees's semigroup of matrix type on the set of three elements $\{-1, 0, 1\}$ with a unit modulo determinant obtained by multiplying all matrices of the semigroup by a number is considered. It is shown that such an extension means the appearance in the composition of an extended semigroup of matrices with imaginary matrix elements $-i$ and i . The obtained complement of the original semigroup does not contain abelian subgroups.

Keywords: the Rees's semigroup of matrix type; expansion of the semigroup's composition; multiplication of matrices of a semigroup by a number; a unit modulo the matrix's determinant; abelian subgroups.

REFERENCES

1. Vinberg E. B. *Kurs algebr* (Algebra Course), 2nd ed., Corr. and add., Moscow, Factorial Press, 2001. 544 p.
2. Fishman B. E. Abelian subgroups Rees's semigroup of matrix type [Abelevy podgruppy v risovskoy polugruppe matrichnogo tipa], *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleihema*, 2014, no. 4(17), pp. 92 – 103.
3. Fishman B. E. About the composition and classification of abelian subgroups contained in the rees's semigroupsof matrix type [O sostave i klassifikacii abelevykh podgrupp, soderzhashhihsja v risovskoj polugruppe matrichnogo tipa], *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleihema*, 2015, no. 3 (20), pp. 101 – 109.

* * *