УДК 519.233.2

А. О. Шерстобитова

О ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В настоящей работе рассматривается последовательная процедура оценивания параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка с дискретным временем. Исследуется средняя асимптотическая длительность последовательной процедуры оценивания. Проведено имитационное моделирование, результаты которого подтвердили, что в последовательных процедурах можно получить заданную среднеквадратическую точность путём выбора порога процедуры.

Ключевые слова: параметрическое оценивание, модель авторегрессии первого порядка с дискретным временем (AR(1)), последовательный подход к оцениванию, асимптотическая длительность последовательной процедуры оценивания.

При рассмотрении задач обработки временных рядов часто используются авторегрессионные модели, которые описывают стационарные случайные процессы. Зачастую параметры таких моделей неизвестны, поэтому требуется оценить их перед использованием модели.

В практических задачах имеется ограниченное доступное число шагов наблюдений. При этом потери существенно нелинейно растут с увеличением количества шагов наблюдений [1]. Также измеряемый параметр часто является случайным процессом. В связи с этим успешно применяется последовательный подход к оцениванию случайных процессов, использующий правило остановки. При последовательном оценивании число наблюдений заранее неизвестно, оно определяется в ходе наблюдения процесса.

Рассматривается процесс x_t, заданный стохастическим разностным уравнением

$$X_i = \lambda X_{i-1} + \sigma\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots , \qquad (1)$$

где $X_0 = 0, \varepsilon_i$ — независимые одинаково распределённые случайные величины. $E\varepsilon_i = 0, Var\varepsilon_i = \sigma^2 < +\infty$.

Отметим, что главной целью оценивания временных рядов является определение будущих значений ряда, поэтому используется функция

Шерстобитова Анна Олеговна — магистрант (Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск); e-mail: Annaivashchenko06@gmail.com

потерь [2]. Функция потерь характеризуется как мера расхождения между истинным значением параметра и его оценкой. В заданной функции потерь условное математическое ожидание $E(X_i|X_{i-1}) = \lambda X_{i-1}$ используется для определения последующих элементов $\hat{X}_i = \hat{\lambda}_n X_{i-1}$

$$L_n(\hat{\lambda}_n,\lambda) = A\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{X}_i - E(X_i|X_{i-1})\right]^2 + n = An^{-1}I_n\left(\hat{\lambda}_n - \lambda\right)^2 + n \qquad (2)$$

где $I_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2$, а $A = 1/c$ — обратная величина цены одного наблюдения [3].

В качестве оценки параметра λ используется оценка по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2} \qquad (3)$$

Рассматривается задача исследования средней асимптотической длительности последовательной процедуры оценивания.

Введём в рассмотрение момент остановки

$$t_A = \inf\left\{n \geq m_A : n \geq A^{\frac{1}{2}}\sigma\right\} \qquad (4)$$

Здесь m_A — заранее заданный объём выборки. Заметим, что момент остановки t_A зависит от цены наблюдения и оценки

$$\hat{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\lambda}_n x_{i-1}\right)^2 \qquad (5)$$

Имеется следующий результат:

$$\frac{E(t_A)}{n_0} \to 1 \text{ при } A \to \infty,$$

где $n_0 \approx A^{\frac{1}{2}}\sigma$, т. е. имеет место асимптотическая эффективность. Данный результат оформлен в виде теоремы [4].

Теорема: Пусть $s > 2$, такое, что выполняется $E|\varepsilon_1|^{4s} < \infty$, $E|x_0|^{4s} < \infty$ и $E\left|\frac{1}{\varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_M^2}\right|^{2s} < \infty$, где M — некоторое положительное целое. Пусть также для заранее заданного объёма выборки m_A выполняется неравенство $A^{\frac{1}{2(1+\mu)}} \leq m_A = o(A^{\frac{1}{2}})$, где $\mu \in (0, \frac{s-2}{2})$. Тогда

$$\frac{E(t_A)}{n_0} \to 1, \; A \to \infty \qquad (6)$$

Таким образом, момент остановки последовательной процедуры оценивания является случайным и обладает свойством асимптотической эффективности. При использовании последовательной процедуры оценивания путём вариации порога процедуры можно получить заданную среднеквадратическую точность.

Проведено имитационное моделирование для подтверждения утверждения теоремы. Результаты представлены в таблице.

Таблица

Результаты имитационного моделирования

A	$E(t_A)/n_0$
400	1,53
1 000	1,47
4 000	1,21
10 000	1,02
50 000	0,76
100 000	0,72
500 000	0,74
1 000 000	0,98

Здесь $A = 1/c$ — обратная величина цены одного наблюдения, $E(t_A)/n_0$ — средняя длительность последовательной процедуры оценивания. Длительность последовательной процедуры усредняется по 4000 реализациям. Таким образом, момент остановки последовательной процедуры оценивания обладает свойством асимптотической эффективности [3]. В последовательных процедурах можно получить заданную среднеквадратическую точность путём выбора порога процедуры. Численное моделирование свидетельствует о хорошем согласии практических результатов с теоретическими.

Список литературы

1. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное изд-е. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
2. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов: пер. с англ. / Т. Андерсон; под ред. Ю. К. Беляева. М.: Мир, 1976. 755 с.
3. *Иващенко А. О.* Идентификация параметров модели устойчивой авторегрессии // Молодёжь и современные информационные технологии: сборник трудов XIII Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Томск, 9—13 ноября 2015 г. / под ред. Т. Е. Мамоновой. Томск: НИ ТПУ, 2016. С. 85—86.
4. *Sriram T. N., Iaci R.* Sequential Estimation for Time Series Models // Sequential Analysis. 2014. Vol. 33. Pp. 136—157.

* * *

Sherstobitova Anna O.

SEQUENTIAL PROCEDURE'S FOR ESTIMATING THE PARAMETERS OF AUTOREGRESSIVE MODELS WITH DISCRETE TIME DURATION

(National Research Tomsk State University, Tomsk)

We consider a sequential procedure for estimating the parameter of a model of stable first-order autoregression with a discrete time. There is an investigation of the average asymptotic duration of a sequential estimation procedure. We performed the simulation modeling, the results of which confirmed that in successive procedures it is possible to obtain a given mean-square accuracy by selecting the procedure threshold.

Keywords: parameter estimation; first-order autoregressive model with a discrete time (AR(1)); sequential estimation procedure; asymptotically duration of a sequential estimation procedure.

REFERENCES

1. Ayvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. Prikladnaya statistika: *Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh* (Applied Statistics: Basics of Modeling and Primary Data Processing. Reference edition), Moscow, Finances and Statistics Publ., 1983. 471 p.
2. Anderson T. *Statisticheskiy analiz vremennykh ryadov* (Statistical Analysis of Time Series), Moscow, Mir Publ., 1976. 755 p.
3. Ivashchenko A. O. Identification of parameters of the stable autoregressive model [Identifikatsiya parametrov modeli ustoychivoy avtoregres-sii], *Molodezh' i sovremennye informatsionnye tekhnologii: sbornik trudov XIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh* (Youth and modern information technology: a collection of works of the XIII International scientific and practical conference of students, graduate students and young scientists), Tomsk, 2016, pp. 85—86.
4. Sriram T. N., Iaci R. Sequential Estimation for Time Series Models, *Sequential Analysis*, 2014, vol. 33, pp. 136—157.

* * *