УДК 532.135

В. Н. Харитонов, В. М. Шаповалов

ВАЛКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ОСТВАЛЬДА–ДЕ ВИЛЯ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ ФРИКЦИИ

Предложен способ решения задач течения неньютоновских жидкостей. Способ может найти применение при анализе течений, в которых доминирует простое сдвиговое течение с известными параметрами.

Ключевые слова: давление, касательное напряжение, компоненты скорости, второй инвариант тензора скоростей деформации.

Для интенсификации процесса перемешивания в валковых машинах используют режим работы со значительной фрикцией. Реологические свойства значительной части полимеров и резин можно описать законом Освальда-де Виля. Однако использование степенного закона приводит к значительным техническим трудностям анализа модели [1]. В данной работе предпринята попытка упрощения задачи путём линеаризации второго инварианта тензора скоростей деформации.

Схема течения представлена на рисунке 1. Валки имеют одинаковые радиусы (R), но различную окружную скорость u_1 и u_2 ($u_1>u_2$). Начало координат помещено в середине сечения минимального зазора. Начало зоны течения характеризует координата x_0, окончание - x_1. Текущая полувысота зазора h(x). Минимальный зазор $2H_0$. Течение плоское, изотермическое. Среда несжимаемая. В силу условия $x_1 - x_0 >> h$ давление однородно по высоте зазора ($\partial p/\partial y = 0$), следовательно, p=p(x).

Течение описывается системой уравнений [2]:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \qquad \tau_{xy} = \mu_0 \left[\frac{(\Delta:\Delta)}{2}\right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \tag{1}$$

Харитонов Владимир Николаевич — кандидат технических наук, доцент (Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский); e-mail: vtm@volpi.ru.

Шаповалов Владимир Михайлович — доктор технических наук, профессор (Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский); e-mail: svm-5@meil.ru.

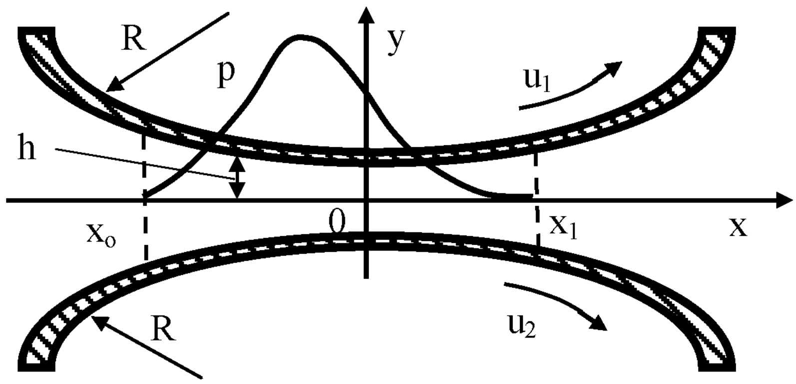

Рис. 1. Схема течения

$$Q=\int_{-h}^{h} v_x dy, \tag{2}$$

$$y = h, \quad v_x = u_1, \tag{3}$$

$$y = -h, \quad v_x = u_2, \tag{4}$$

$$x = x_0, \quad p = 0, \tag{5}$$

$$x = x_1: \quad p = 0, \quad dp/dx = 0, \tag{6}$$

где p — давление; x, y — координаты; τ_{xy} — касательное напряжение; v_x, v_y — компоненты скорости; μ_0, n — реологические константы, Q — расход жидкости, приходящийся на один метр ширины валков, $(Q = \text{const})$.

Здесь (1) — уравнение движения и состояния; (2) — уравнение расхода; (3), (4) — условия прилипания; (5), (6) — условия для давления (в концепции Гаскелла).

Входящий в уравнение состояния (1) второй инвариант тензора скоростей деформации с учётом соотношений $v_z = 0$, $\partial v_x/\partial y >> \partial v_y/\partial x$, $h << x_1 - x_0$, $\partial v_x/\partial y >> \partial v_x/\partial x$ и уравнения (2), имеет вид:

$$\frac{(\Delta:\Delta)}{2} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2. \tag{7}$$

С учётом соотношения (7) уравнение состояния (1) примет вид:

$$\tau_{xy} = \mu_0 \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{8}$$

Представим осевую скорость в виде суммы:

$$v_x = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2h} y + v_x^*(x, y) \tag{9}$$

Первые два слагаемых правой части характеризуют простое сдвиговое течение, обусловленное фрикцией, а третье — неоднородностью давления. Задача сводится к определению функции $v_x^*(x, y)$. При этом считаем правомерной оценку

$$\left| \frac{d}{dy} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2h} y \right) \right| >> \left| \frac{dv_x^*(x,y)}{dy} \right|. \tag{10}$$

Подставив выражение (9) в (8), с учётом оценки (10) запишем выражение для касательного напряжения в форме

$$\tau_{xy} = \mu_0 \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{n-1} \left(\frac{u_1 - u_2}{2h} + \frac{dv_x^*}{dy} \right). \tag{11}$$

Согласно (11) эффекты аномалии вязкости обусловлены простой сдвиговой компонентой течения. Эффективная вязкость $\mu_0 \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{n-1}$ однородна по высоте зазора, но изменяется по его длине, поскольку h(x).

Из граничных условий (3), (4) с учётом (9) получим условия для функции v_x^*: $y = \pm h$, $v_x^* = 0$.

Дважды проинтегрируем уравнение движения (1) с учётом выражения (11) и граничных условий для функции v_x^*. При этом получим:

$$v_x^* = \frac{1}{2\mu_0} \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{1-n} \frac{dp}{dx} \left(y^2 - h^2 \right). \tag{12}$$

Найдём осевой расход жидкости по формуле (2). Выполнив интегрирование с учётом (9), (12), получим:

$$Q = (u_1 - u_2)h - \frac{2h^3}{3\mu_0} \left| \frac{u_1 - u_2}{2h} \right|^{1-n} \frac{dp}{dx}. \tag{13}$$

С учётом граничного условия (6) определим расход:

$$Q = (u_1 - u_2)h_1, \qquad h_1 = h(x_1). \tag{14}$$

Уравнение для давления (13) с учётом (14) запишем так:

$$\frac{dp}{dx} = 3\mu_0 \left|\frac{u_1 - u_2}{2}\right|^n \left(\frac{1}{h^{1+n}} - \frac{h_1}{h^{2+n}}\right). \tag{15}$$

Примем параболическую аппроксимацию поверхностей валков $h = H_0(1 + \xi^2)$ и перейдём к безразмерным переменным:

$$\{\xi, \xi_0, \xi_1\} = \frac{\{x, x_0, x_1\}}{\sqrt{2RH_0}}, \quad P = \frac{pH_0^{1+n}}{3\mu_0\sqrt{2RH_0}}\left|\frac{u_1 - u_2}{2}\right|^{-n}, \ (u_1 \neq u_2). \tag{16}$$

С учётом соотношений (16) уравнение (15) примет вид:

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{1}{(1+\xi^2)^{1+n}} - \frac{(1+\xi_1^2)}{(1+\xi^2)^{2+n}} . \tag{17}$$

Разделив переменные в (17) и проинтегрировав, с учётом граничного условия (5) в форме $\xi = \xi_0$, P=0, получим выражение для безразмерного давления

$$P = \left[1 - (1+\xi_1^2)\frac{2n+1}{2(1+n)}\right]\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1+n}} - \frac{(1+\xi_1^2)}{2(1+n)}\left[\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{1+n}} - \frac{\xi_0}{(1+\xi_0^2)^{1+n}}\right]. \tag{18}$$

Условие (6) в безразмерной форме имеет вид $\xi = \xi_1$, P=0. Используя это условие для (18), получим уравнение, связывающее параметры ξ_0, ξ_1

$$\left[1 - (1+\xi_1^2)\frac{2n+1}{2(1+n)}\right]\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1+n}} - \frac{(1+\xi_1^2)}{2(1+n)}\left[\frac{\xi_1}{(1+\xi_1^2)^{1+n}} - \frac{\xi_0}{(1+\xi_0^2)^{1+n}}\right] = 0 \cdot \tag{19}$$

Параметры ξ_0, ξ_1 характеризуют безразмерные границы зоны течения. Согласно (19) их численные значения зависят от индекса течения (n), но не зависят от фрикции.

Из полученных расчётных выражений (18), (19) видно, что использованный способ выделения доминирующей компоненты скорости (простой сдвиг) к рассматриваемой задаче позволяет значительно упростить расчётные выражения; расчётные выражения по форме близки к расчётным выражениям, характерным для ньютоновской жидкости. Точность асимптотического приближения повышается с увеличением фрикции.

Список литературы

1. *Розе Н. В.* Течение полимерных материалов между двумя вращающимися цилиндрами // ДАН СССР. 1972. Т. 206. № 4. С. 834—837.
2. *Шаповалов В. М.* Валковые течения неньютоновских жидкостей. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 168 с.

* * *

Kharitonov Vladimir N., Shapovalov Vladimir M.

THE SWATH OF FLUID FLOW OF OSTWALD-DE VILLE AT SIGNIFICANT FRICTIONS

(Volzhsky Polytechnical Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Professional Education ‘Volgograd State Technical University’, Volzhsky, Volgograd region)

A method for solving the flow of non-Newtonian fluids has been offered. The method can be used in the analysis of trends, which is dominated by a simple shear flow with known parameters.

Keywords: pressure, shear stress, velocity components, the second invariant of the strain rate tensor.

References

1. Roze N. V. Techenie polimernykh materialov mezhdu dvumya vrashchayushchimisya tsilindrami [The flow of polymer materials between two rotating cylinders], *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1972, vol. 206, no. 4, pp. 834—837.
2. Shapovalov V. M. *Valkovye techeniya nen'yutonovskikh zhidkostey* (Roller flow of non-Newtonian fluids), Moscow, FIZMATLIT Publ., 2011. 168 p.

* * *