УДК: 517.956.32

Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, Меач Мон

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

В работе метод конечных элементов распространяется на математическую модель второго порядка с негладкими решениями.

Ключевые слова: математическая модель, метод конечных элементов, негладкие решения.

Метод конечных элементов мы применим для нахождения приближённого решения математической модели, задаваемой следующей системой

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)u''_{tt} = \left(p(x)u'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma, \\ \gamma_1 u(0,t) - u'_x(0,t) = 0, \\ \gamma_2 u(l,t) + u'_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \overline{\varphi}_0(x), \\ u'_t(x,0) = \overline{\varphi}_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых поперечных собственных колебаний растянутой с силой $p(x)$ вдоль отрезка $[0;l]$ струны, оба конца которой имеют упругое закрепление с помощью пружин жесткости γ_1 и γ_2 соответственно. Кроме того, вся система помещена во внешнюю среду с локальным коэффициентом упругости dQ, а на струне произвольным образом распределены массы. Отметим, что скачки функции $Q(x)$ соответствуют локализованным особенностям (типа пружины). Функции $\overline{\varphi}_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ — это начальные отклонения от положения равновесия и скорость объекта соответственно.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E — непрерывных по сово-

Голованёва Фаина Валентиновна — кандидат физико-математических наук, доцент (Воронежский государственный университет, Воронеж); e-mail: shaspoteha@mail.ru.

Шабров Сергей Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент (Воронежский государственный университет, Воронеж); e-mail: shabrov_s_a@math.usu.ru.

Меач Мон — кандидат физико-математических наук, доцент (Университет Khmerak, Пномпень, Королевство Камбоджа); e-mail: meach_mon@yahoo.com.

купности переменных на $[0;l]\times[0;T]$ функций, имеющих непрерывные частные производные $u_t^{'}$ и $u_{tt}^{''}$ при каждом фиксированном $x\in[0;l]$. При этом: $u(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;l]$ при фиксированном t; $pu_x^{'}(x,t)$ — σ — абсолютно непрерывна на $[0;l]$ для каждого постоянного $t\in[0;T]$; смешанные частные производные $u_{tx}^{''}$ и $u_{xt}^{''}$ равны почти всюду. Функция $\sigma(x)$, порождающая на $[0;l]$ меру, содержит все особенности системы, а именно: у $\sigma(x)$ есть скачки в тех и только тех точках, в которых имеется скачок хотя бы у одной из функций $p(x)$, $Q(x)$ или $M(x)$, входящих в дифференциальное уравнение системы (1).

Для нахождения приближённого решения изучаемой модели мы адаптируем к ней метод конечных элементов. Решение $u_N(x,t)$ ищем в виде $\sum_{k=0}^{N} a_k(t)\varphi_k(x)$, где $\varphi_k(x)$ — классические базисные функции, $a_k(t)$ — неизвестные функции. Построение $\varphi_k(x)$ произведём следующим образом: отрезок $[0;l]$ разобьём на N равных частей упорядоченным набором точек x_k, $k=0,1,\ldots,N$ ($x_0=0$, $x_N=l$ и добавим точки $x_{-1}=-1/N$ и $x_{N+1}=l+1/N$); $\varphi_k(x)$ равна единице в точке x_k, нулю на $[0;x_{k-1}]\cup[x_{k+1};l]$ и продолжена линейной функцией на $[x_{k-1};x_k]$ и $[x_k;x_{k+1}]$.

Применим стандартную схему метода конечных элементов: умножим уравнение в (1) на базисную функцию, проинтегрируем по мере σ (именно в этом и состоит отличие от классического метода). В результате для нахождения $a_k(t)$ получим линейную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка, для численного решения которой можно применять различные разностные схемы. Можно показать, что получающаяся система, дополненная начальными данными, которые определяются из начальных условий модели (1), имеет единственное решение.

Доказано, что скорость сходимости приближённого решения к точному имеет порядок $N^{-1/2}$.

Метод конечных элементов удалось применить к изучаемой модели ввиду того, что дифференциальное уравнение в (1) является поточечно-заданным. Последнее стало возможно после применения производных по мере в рамках концепции Ю. В. Покорного [5], которая получила развитие в работах [1—4], [6—8] его учеников для различных математических моделей с особенностями.

Список литературы

1. *Голованёва Ф. В.* О функции Грина некоторых негладких задач: дисс. … канд. физ.-мат. наук; Воронежский государственный университет. Воронеж, 2007. 101 с.
2. *Зверева М. Б.* О некоторых вопросах качественной теории дифференциаль-

ных уравнений с производными Стилтьеса: дисс. … канд. физ.-мат. наук; Воронежский государственный университет. Воронеж, 2005. 120 с.
3. *Зверева М. Б., Шабров С. А., Лылов Е. В.* Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 97—105.
4. *Покорный Ю. В.* Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, М. Б. Давыдова // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 428. № 5. С. 595—597.
5. *Покорный Ю. В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Доклады Академии НАУК. 1999. Т. 364. № 2. С. 167—169.
6. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // Успехи математических наук. 2008. Т. 63. № 1. С. 111—154.
7. *Шабров С. А.* Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 232—250.
8. *Pokornyi Yu. V.* An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, A. S. Ishchenko // Mathematical Notes. 2007. T. 82. № 3—4. С. 518—521.

* * *

Golovaneva Faina V.[1], Shabrov Sergey A.[2], Meach Mon[3]

DAPTATION FINITE ELEMENT METHODS FOR ONE MATHEMATICAL MODEL OF THE SECOND ORDER WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

([1, 2] Voronezh State University, Voronezh, Russia;
[3] University Khmerak, Phnom Penh, Kingdom of Cambodia)

In the work the finite element method covers the mathematical model of the second order with nonsmooth solutions.

Keywords: mathematical model, the finite element method, nonsmooth solutions.

References

1. Golovaneva F. V. *O funktsii Grina nekotorykh negladkikh zadach (*On the green function of some nonsmooth problems): the dissertation on competition of a scientific degree of candidate of physical and mathematical Sciences, Voronezh, 2007. 101 p.
2. Zvereva, M. B. *O nekotorykh voprosakh kachestvennoy teorii differentsial'-nykh uravneniy s proizvodnymi Stilt'esa (*On some problems of qualitative theory of differential equations with derivatives of the Stieltjes): the dissertation on competition of a scientific degree of candidate of physical and mathematical Sciences, Voronezh, 2005. 120 p.
3. Zvereva M. B., Shabrov S. A., Lilov E. V. Adaptation of the Finite Elements Method for Solution of a Boundary Value Problem with Stieltjes Differentials on a Graph [Ob adaptatsii metoda konechnykh elemen-tov dlya resheniya granichnoy zadachi s differentsialami Stilt'esa na geo-metricheskom grafe], *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta,* Series: *Fizika. Matematika*, 2014, no. 1, pp. 97—105.
4. Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Davydova M. B. Stieltjes differential pulsed problems with discontinuous solutions [Differentsial Stilt'esa v

impul'snykh zadachakh s razryv-nymi resheniyami], *Doklady Akademii Nauk,* 2009, vol. 428, no. 5, pp. 595—597.
5. Pokornyi Yu. V. The Stieltjes Integral and Derivatives with Respect to the Measure in Ordinary Differential Equations [Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennykh differentsial'nykh uravneniyakh], *Doklady Akademii Nauk,* 1999, vol. 364, no. 2, pp. 167—169.
6. Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems [Ostsillyatsionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snykh zadach], *Uspekhi matematicheskikh nauk,* 2008, vol. 63, no. 1, pp. 111—154.
7. Shabrov S. A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features [Ob odnoy matematicheskoy modeli malykh deformatsiy sterzhne-voy sistemy s vnutrennimi osobennostyami], *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta,* Series: *Fizika. Matematika*, 2013, no. 1, pp. 232—250.
8. Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A., Ishchenko A. S. An Irregular Extension of the Oscillation Theory of the Sturm-Liouville Spectral Problem, *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 3—4, pp. 518—521.

* * *