

УДК 532. 135:539.3

С. В. Лапшина, В. М. Шаповалов**НАНЕСЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ УПРУГОЙ РАКЛЕЙ**

Построена математическая модель гидроупругости течения неньютоновской жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой. Стенка рассматривается как тонкая упругая цилиндрическая оболочка, для которой справедливы гипотезы Кирхгофа–Лява, средняя линия пластины принимается нерастяжимой. Течение в зазоре рассматривается в приближении теории смазочного слоя Рейнольдса. Представлены результаты численного анализа математической модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, ньютоновская жидкость, гидроупругость, давление, упругая пластина, изгиб, сила, момент.

Течение имеет место при нанесении составов способом втирания [1]. Одной из стенок канала является обрабатываемый материал, а другой — рабочий орган наносящего устройства в виде ножа (ракли), пластины или валька. Канал имеет сужающееся сечение.

Если для каландров из-за больших распорных усилий и потребляемых мощностей определяющими являются энергосиловые и механические расчёты, то для процессов нанесения составов типа клеев или паст возникающие усилия относительно невелики, и при проектировании можно ограничиться их приближённой оценкой. Более значимыми параметрами становятся толщина наносимого покрытия и давление в зоне течения.

Случай клинообразного зазора с жёсткими стенками рассмотрен в работе [1]. В работе [2] рассмотрено течение в клинообразном зазоре, с подпружиненной стенкой, имеющей возможность перемещаться, сохраняя угол своего наклона.

В настоящей работе рассмотрен случай гибкой упругой ракли (типа кисти), закреплённой консольно и имеющей возможность изгибаться под действием давления со стороны жидкости. Насколько известно автору, подобное течение до настоящего времени не рассматривалось. Близкий по смыслу случай валька из упругого материала рассмотрен в работе [3].

Лапшина Светлана Владимировна — кандидат технических наук, доцент (Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский); e-mail: vtm@volpi.ru.

Шаповалов Владимир Михайлович — доктор технических наук, профессор (Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Волжский); e-mail: svm-5@mail.ru.

© Лапшина С. В., Шаповалов В. М., 2016

Схема течения представлена на рисунке 1. Декартова система координат привязана к точке заделки ракля (слева, сверху, заштрихована). Ракля представляет гибкую пластину, длиной ℓ . Нижняя горизонтальная плоскость движется в направлении оси x со скоростью V . Ось y направлена вертикально вверх. Величина начального зазора h_0 , конечного – h_1 , наносимого покрытия – h_∞ . Ширина ракля (перпендикулярна плоскости рисунка) – B . Требуется найти форму ракля, толщину наносимого покрытия, давление в зазоре. Имеем стационарную задачу силового взаимодействия вязкой жидкости с упругой деформируемой стенкой, т. е. задачу гидроупругости.

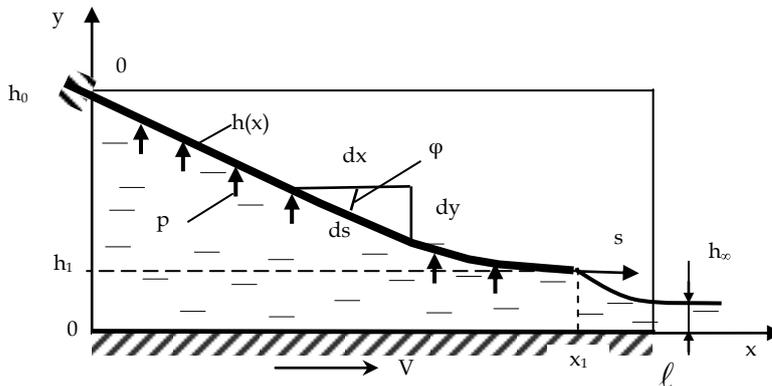


Рис. 1. Расчётная схема

Считаем наносимый состав несжимаемой ньютоновской жидкостью. Течение изотермическое, плоскопараллельное. Силы тяжести и инерции не учитываем. Протяжённость зоны течения больше высоты зазора ($\ell > h_0$) так, что выполняется условие $\partial p / \partial x > \partial p / \partial y$. Поэтому полагаем $p(x)$, $\partial p / \partial y = 0$.

Течение в зазоре описывается уравнением Навье-Стокса и интегральным условием неразрывности [2]

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad Q = B \int_0^h v_x dy = \text{const.} \quad (1)$$

где x, y – декартовы координаты, p – давление, v_x – осевая компонента скорости, Q – объёмный расход, μ – вязкость жидкости.

Граничные условия для скорости – условие прилипания жидкости к ограничивающим поверхностям

$$y = 0, \quad v_x = V; \quad y = h(x), \quad v_x = 0, \quad (2)$$

где $h(x)$ – уравнение поверхности ракля.

Согласно уравнению движения (1) давление определено с точностью до постоянной составляющей. Поэтому, без снижения общности, можно положить атмосферное давление равным нулю

$$x = 0, \quad p = 0; \quad x = x_1, \quad p = 0. \quad (3)$$

Здесь величина x_1 характеризует положение конца ракли; пока нам не известна. Рассматриваем течение в области $0 \leq x \leq x_1, \quad 0 \leq y \leq h(x)$.

Проинтегрировав уравнение движения в (1) по y , с учётом граничных условий (2), получим выражение для осевой скорости жидкости

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + V \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (4)$$

Проинтегрировав выражение (4) согласно второму уравнению в (1), получим уравнение для давления

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^2} - \frac{12Q\mu V}{Bh^3}. \quad (5)$$

Рассматриваем раклю как упругую консольную балку, закреплённую на левом конце (см. рис. 1) и нагруженную распределённой нагрузкой со стороны жидкости. Поскольку на верхнюю поверхность ракли действует атмосферное давление, под распределённой нагрузкой будем понимать избыточное гидродинамическое давление в зоне течения $p(x)$. Растяжение упругой оси не учитываем, поскольку соответствующие продольные деформации растяжения значительно меньше изгибных перемещений. Для упругой оси справедливы геометрические соотношения (рис. 1)

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = dh/dx, \quad (6)$$

где s — линия упругой оси (в точке закрепления значения параметров: $x = 0, y = h_0, s = 0$, а на свободном конце ракли: $x = x_1, y = h_1, s = \ell$), φ — угол наклона.

Имеет место чистый изгиб ракли. Пренебрегаем влиянием поперечной силы на деформацию ракли. Дифференциальное уравнение изогнутой оси ракли имеет вид [4]

$$\frac{d^2h}{dx^2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2} \right\}^{-1} = \frac{M}{EJ}, \quad (7)$$

где $M(x)$ — изгибающий момент, EJ — жёсткость ракли, E — модуль упругости, $J = B\delta_1^3/12$ — момент инерции, δ_1 — толщина ракли.

Левая часть уравнения (7) характеризует локальную кривизну рак-

ли. Перед моментом (в правой части) принят знак плюс, поскольку выпуклость кривой обращена в сторону положительного направления оси y . Изгибные деформации ракли значительны, поэтому в выражении для кривизны сохраняем иррациональность.

Жидкость в зазоре создаёт распределённую нагрузку, приложенную к нижней поверхности ракли, в то же время уравнение (7) описывает упругую ось ракли. Эти линии эквидистантны и расстояние между ними $\delta_1/2$. Согласно уравнению (7) вертикальное смещение на постоянную величину не влияет на кривизну плоской кривой, что и отражено в записи уравнения (7). Считаем, что нейтральный слой совпадает с упругой осью. Далее будем считать, что момент инерции мал, а модуль упругости велик.

Уравнение (7) необходимо дополнить дифференциальными зависимостями [4]

$$\frac{dM}{dx} = q(x), \quad \frac{dq}{dx} = -Bp', \quad (8)$$

где $q(x)$ – поперечная сила.

Уравнения (6) – (8) необходимо дополнить граничными условиями

$$\begin{aligned} x=0: \quad h=h_0, \quad s=0, \quad q=q_0, \quad M=M_0, \\ x=x_1: \quad h=h_1, \quad s=\ell, \quad q=0, \quad M=0. \end{aligned} \quad (9)$$

На свободном конце ракли поперечная сила и момент равны нулю.

Перейдём к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \delta, \delta_1 = \frac{h, h_1}{h_0}, \quad X, X_1, \varepsilon, \xi = \frac{x, x_1, h_0, s}{\ell}, \quad P = \frac{ph_0^2}{6\ell\mu V}, \quad Q_1 = \frac{2Q}{h_0 VB}, \\ m, m_0 = \frac{M, M_0}{6\mu VB\ell}, \quad q_1, q_{10} = \frac{q, q_0}{6\mu VB}, \quad k = \frac{6\ell^2 \mu VB}{EJ}. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр k характеризует безразмерную «гибкость» ракли. При $k \rightarrow 0$ ракли абсолютно жёсткая (толстая стальная пластина), а при $k \rightarrow \infty$ бесконечно гибкая (ткань, тонкая резина). В последнем случае задача теряет смысл, поскольку ракли принимает горизонтальное положение.

Считаем длину ракли фиксированной (ℓ). При этом удобно перейти от переменной x к ξ . С учётом обозначений (10) уравнения (3), (5) – (9) примут вид

$$\frac{dX}{d\xi} = \cos\varphi, \quad \frac{d\delta}{d\xi} = \frac{\sin\varphi}{\varepsilon}, \quad \frac{dP}{d\xi} = \frac{\delta - Q_1 \cos\varphi}{\delta^3},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = km, \quad \frac{dq_1}{d\xi} = \frac{P}{\varepsilon^2} \cos \varphi, \quad \frac{dm}{d\xi} = q_1 \cos \varphi; \quad (11)$$

$$\xi = 0: \quad X = 0, \quad \delta = 1, \quad P = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad q_1 = q_{10}, \quad m = m_0; \quad (12)$$

$$\xi = 1: \quad X = X_1, \quad \delta = \delta_1, \quad P = 0, \quad \varphi = \varphi_1, \quad q_1 = 0, \quad m = 0. \quad (13)$$

Имеем задачу Коши для 6 дифференциальных уравнений. Величины Q_1 , q_{10} , m_0 неизвестны, и их надо подбирать (метод стрельбы) так, чтобы с заданной точностью выполнялись условия на конце зоны течения ($\xi = 1$: $P = 0$, $q_1 = 0$, $m = 0$). Параметр φ_0 , характеризующий начальный наклон ракли (угол заделки), задаётся априорно. При отладке программы можно использовать тест (начальное приближение): $\varphi_0 = 0$, $\delta_1 = 1$, $q_{10} = 0$, $m_0 = 0$, $P = 0$.

Используя условия (3) и уравнение (5), найдём расход жидкости. Разделив переменные в уравнении (5) и проинтегрировав с учётом условий (3), получим выражение для объёмного расхода

$$Q = \frac{BV}{2} \int_0^{x_1} \frac{dx}{h^2} \left(\int_0^{x_1} \frac{dx}{h^3} \right)^{-1}.$$

С другой стороны, для расхода жидкости на покрытии (на движущейся подложке) можем записать $Q = BV h_\infty$. После несложных преобразований, с учётом обозначений (10) получим выражение для толщины покрытия

$$\frac{h_\infty}{h_0} = \frac{1}{2} Q_1.$$

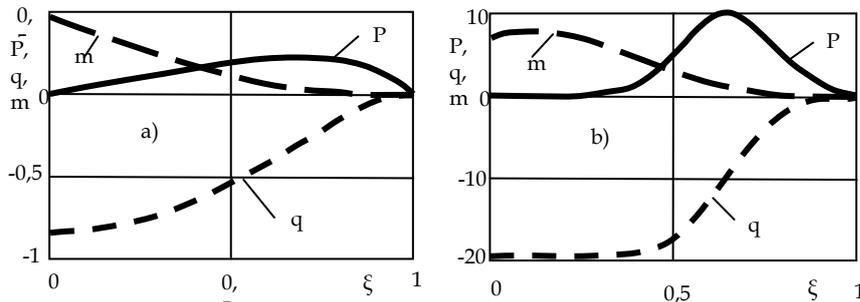


Рис. 2. Распределение давления, момента и поперечной силы по длине ракли при $\varphi_0 = -0,3$ (а) и $\varphi_0 = -2,1$ (б).

Анализ задачи выполнен для следующих условий: $\varepsilon = 0,4$; $\ell = 0,1$ м; $\mu = 10$ Па·с; $V = 0,5$ м/с; $E = 0,5 \times 10^7$ Па; $B = 1$ м; $\delta_1 = 10^{-2}$ м; $k = 0,6$; $-0,3 \geq \varphi_0 \geq -2,1$. Модуль упругости отвечает резине [5]. Расчёты выполнены в среде Mathcad. Программа включала алгоритм решения системы шести дифференциальных уравнений и поиск минимума функции

f $Q_1, q_{10}, m_0 = \sqrt{m(\xi=1)^2 + q(\xi=1)^2 + P(\xi=1)^2}$. Для поиска минимума использовался алгоритм «Квази-Ньютон». Время расчёта одного варианта поиска экстремума не превышало 2 минуты. Погрешность вычислений не превышала 10^{-3} . С увеличением начального угла наклона сходимость схемы поиска минимума ухудшалась, особенно при $|\varphi_0| > 1,5$.

С увеличением начального угла наклона ракли (φ_0) толщина покрытия (Q_1) монотонно уменьшается, но поперечная сила (q_{10}) и момент в заделке (m_0) увеличиваются.

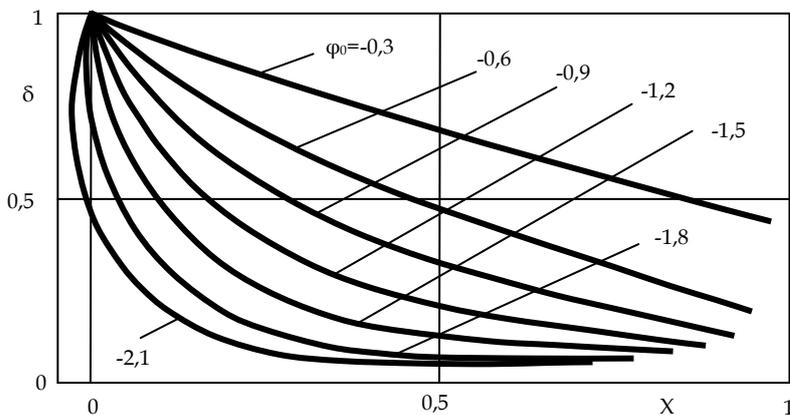


Рис. 3. Конфигурации ракли при различных начальных углах её наклона при $\varepsilon = 0,4$.

На рис. 2 представлены эпюры продольного распределения давления, момента и поперечной силы для двух углов наклона ракли. С увеличением абсолютной величины наклона ракли изменяется характер эпюры моментов. Появляется экстремум в окрестности заделки. Эпюра давления качественно не изменяется, но экстремум давления становится более ярко выраженным. Из рис. 2b видно, что в области $0 < \xi < 0,3$ течение отсутствует. Интересно отметить, что на указанном участке поперечная сила сохраняет постоянное значение, а момент имеет максимум.

На рис. 3 представлены конфигурации ракли при различных углах заделки. Для получения геометрического соответствия высота графика относится к его длине как 4:10, что отвечает заданному значению параметра ε . Если при $\varphi_0 = -0,3$ прогиб ракли почти не заметен, то при больших углах начального наклона ракли изгибается существенно. При этом толщина зоны течения уменьшается, соответственно уменьшается и толщина наносимого покрытия. В предельном случае «встречного выпучивания» $\varphi_0 = -2,1$ угол наклона свободного конца ракли $\xi = 1$, $\varphi_1 = 0,00752$, то есть имеет место поднятие свободного конца ракли. Это является существенным научным результатом исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов В. И., Коваль А. М. Пропиточно-сушильное и клеепромазочное оборудование. М.: Химия, 1989. 224 с.
2. Шаповалов В. М. Течение аномально вязкой жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой // Изв. ВолГТУ. Реология: процессы и аппараты химической технологии: межвуз. сб. науч. тр. Волгоград: РПК «Политехник», 2010. С. 74–77.
3. Беспорточный А. И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта упругого цилиндра и жёсткого полупространства // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 2. С. 4–12.
4. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.
5. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1965. 248 с.

* * *

Lapchina Svetlana V., Shapovalov Vladimir M.
**APPLYING A VISCOUS LIQUID ONTO THE HORIZONTAL SURFACE
 OF THE ELASTIC SQUEEGEE**

(Volzhsky Polytechnical Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Professional Education 'Volograd State Technical University', Volzhsky, Volgograd region)

The mathematical model of the hydroelasticity of the flow of non-Newtonian liquid in the tapered clearance with the elastic wall is built. The wall is considered as a thin elastic cylindrical shell, for which Kirchhoff- Love hypotheses are valid, the center line of plate is taken as nonductile. Flow in the clearance is examined in the approximation of the theory of the lubricant layer of Reynolds. The results of the numerical analysis of mathematical model are represented.

Keywords: mathematical simulation, Newtonian liquid, hydroelasticity, pressure, elastic plate, bend, force, moment.

REFERENCES

1. Konovalov V. I, Kovalev A. M *Propitochno-sushil'noe i kleepromazochnoe oborudovanie* (Impregnating and drying equipment and surface spreaders), Moscow, Khimiya Publ., 1989. 224 pp.
2. Shapovalov V. M. The flow of abnormally viscous fluid in the wedge-shaped gap with an elastic wall [Techenie anomal'no vyazkoy zhidkosti v klinoobraznom zazore s uprugoy stenкой], *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Reologiya: protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii: Interuniversity collection of scientific papers, Volgograd, Politekhnik Publ.*, 2010, pp. 74–77.
3. Besportochnyy A. I. Asymptotic regimes of hydrodynamic contact of elastic half-cylinder and hard [Asimptoticheskie rezhimy gidrodinamicheskogo kontakta uprugogo tsilindra i zhestkogo poluprostranstva], *Trudy MFTI*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 4–12.
4. Belyaev N. M. *Soprotivlenie materialov* (Strength of Materials), Moscow, Nauka Publ., 1976. 608 p.
5. Koshkin N. I., Shirkevich M. G. *Spravochnik po elementarnoy fizike* (Handbook of elementary physics), Moscow, Nauka Publ., 1965. 248 p.

* * *