УДК 512.542.1

В. В. Мендель

ВСЕВОЗМОЖНЫЕ БАЗИСЫ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ S_{n+1}, ИЗ n ЦИКЛОВ ДЛИНЫ ОТ 2 ДО $n+1$.

В статье приводится способ нахождения некоторых базисов симметрической группы S_{n+1}. В качестве условия взято, что элементы базиса $\{y_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяют равенству $y_1^2 = y_2^3 = \ldots = y_n^{n+1} = e$. В работе описано количество таких базисов, алгоритмы их нахождения и некоторые выводы.

Ключевые слова: симметрическая группа, цикл, базис, представление.

Существует множество способов представления элементов симметрической группы. Одним из наиболее удобных можно считать такой, при котором каждому элементу группы S_{n+1} соответствует упорядоченная n-ка чисел, где на i-й позиции находится число от 0 до i (в таком виде легко определить порядок и длину подстановки). Один из способов получить такое представление элементов группы S_{n+1} является разложение всех ее элементов в произведение циклов соответствующих длин от 2 до n+1, то есть представление в некотором базисе $\{y_i\}_{i=1}^n$, где $y_1^2 = y_2^3 = \ldots = y_n^{n+1} = e$ (e — единичный элемент). Рассмотрим способ получения всех таких базисов и способ представления каждого элемента симметрической группы с их помощью. Для начала докажем вспомогательное утверждение:

Утверждение 1. Если элемент $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ цикл порядка n+1. Здесь $x_i = e_1 e_2 \ldots e_i$, где $e_i = (i, i+1)$ (транспозиция соседних элементов) и $x_i^{i+1} = e$, $i = \overline{1, n-1}$, $x_i x_k = x_1 x_{k+1} x_i$ для $i>k$ [1, с. 34], то при последовательном возведении элемента f в степени от 1 до n степень старшего образующего элемента x_n будет проходить в некотором порядке, все значения от 1 до n, при возведении f в степень n+1 все степени образующих равны нулю.

Доказательство.

В элементе $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ задающем подстановку

Мендель Василий Викторович — аспирант (Дальневосточный государственный гуманитарный университет, Хабаровск); e-mail: mendel_ww@mail.ru.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 & n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, α_n однозначно определяет положение символа *n* в этой подстановке. *n* находится на позиции $(n-\alpha_n)\operatorname{mod}(n+1)$ [2, с. 299]. Так как при последовательном возведении цикла в степени символ *n* должен пройти все *n* позиций, то он посетит все позиции, кроме *n*, а значит, степени α_n примут все значения, кроме нуля. Если возвести $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ в степень *n*, то получим единичный элемент, а значит, $\alpha_n = 0$.

Утверждение доказано.

Замечание. Для любого элемента $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in S_{n+1}$, порядка *k*, не являющегося циклом длины *n*+1, возведение во все степени от 1 до *k*–1 не даст всех степеней α_n старшего образующего элемента. Это напрямую следует из доказательства утверждения, так как символ *n* в таком случае включен в цикл меньшего порядка, чем *n*+1, а значит, не пройдет все позиции от 0 до *n*–1, даже если порядок элемента *f* больше или равен *n*+1.

Теперь можно доказать утверждение, при помощи которого находятся все интересующие нас базисы:

Теорема 1. Симметрическая группа S_{n+1} имеет $2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!$ базисов из элементов $y_1^2 = y_2^3 = \dots = y_n^{n+1} = e$.

Доказательство.

1) Покажем, что если взять по одному любому циклу порядка $i = \overline{2, n+1}$, то любой элемент можно представить как последовательное умножение некоторых степеней этих циклов.

a) Возьмем набор $y_1^2 = y_2^3 = \dots = y_n^{n+1} = e$ циклов соответствующей длины ($y_i = x_1^{\beta_1} \dots x_i^{\beta_i}$).

b) Известно, что любой элемент из S_{n+1} представим в виде $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

c) Согласно предыдущему утверждению для каждого элемента $x_1^{\alpha_1^i} \dots x_i^{\alpha_i^i}$ существует такая степень γ_i, что $y_i^{\gamma_i} = x_1^{c_1} \dots x_{i-1}^{c_{i-1}} x_i^{\alpha_i^i}$. Домножая, для любого *i*, $x_1^{\alpha_1^i} \dots x_i^{\alpha_i^i}$ справа на элемент $y_i^{-\gamma_i}$, будем получать $x_1^{\alpha_1^{i-1}} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}^{i-1}}$ до тех пор, пока не получим разложение изначального элемента в произведение степеней $y_1, \dots, y_n$.

Из a)-c) следует, что любой элемент группы S_{n+1} представим в виде $y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} \dots y_n^{\gamma_n}$, где $y_1, \dots, y_n$ циклы соответствующих длин. Из предыдущего утверждения следует, что если в качестве y_i выступает не цикл длины *i*+1, то в таком виде можно представить не все элементы группы S_{n+1}.

2) Пользуясь формулой для определения количества элементов заданной циклической структуры [3, с. 171], имеем, что в группе S_i ровно

$(i-1)!$ циклов длины i. Это значит, что существует $2!\cdot 3!\cdot ...\cdot n!$ способов выбрать базис $y_1, ..., y_n$ в группе S_{n+1}.

Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве предоставляется способ перехода от системы образующих элементов $x_1, ..., x_n$ к произвольному базису элементов $y_1, ..., y_n$.

Опираясь на вышеизложенный материал, можно составить алгоритм (и соответственно программу) для поиска всех таких базисов некоторой симметрической группы.

Алгоритм 1. Нахождение всевозможных базисов.

1) Задаем элементы $x_1, ..., x_n$.

2) Для каждого из них находим множество X_i, $i=\overline{1,n}$ всех сопряженных (любым известным способом на наше усмотрение).

3) Для каждого элемента из X_i $i=\overline{1,n-1}$ последовательно подставляем в базис на i+1 место все элементы из X_{i+1}, то есть генерируем всевозможные сочетания элементов из множеств X_i (по одному из каждого).

Алгоритм 2. Нахождение представления элемента $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ в новом базисе.

1) Задаем базис группы S$_{n+1}$: $y_1^2 = y_2^3 = ... = y_n^{n+1} = e$.

2) Начиная с n, для каждого элемента $x_1^{\alpha_1^i}...x_i^{\alpha_i^i}$ находим степень γ_i образующего $y_i = x_1^{\beta_1}...x_i^{\beta_i}$, такую, что степени старших образующих x_i совпадают.

3) Получаем $x_1^{\alpha_1^{i-1}}...x_{i-1}^{\alpha_{i-1}^{i-1}}$ как произведение $x_1^{\alpha_1^i}...x_i^{\alpha_i^i}\cdot y_i^{\gamma_i}$.

4) Полученный набор γ_i и есть степени базисных элементов y_i.

Рассмотрим группу S_4, она имеет 12 базисов, удовлетворяющих нашим условиям. Выпишем их в таблицу вместе со значениями, определяющими взаимодействие базисных элементов между собой.

Как видно, существует всего 6 качественно различных базисов группы S_4, то есть таких, где взаимодействия между соответствующими парами (y_i, y_j) различны. Совпадающие базисы можно рассмотреть на примере. Запишем подстановки, соответствующие первому и второму базису:

1) $x_1 = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,2\,0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 1\,2\,3\,0 \end{pmatrix}$;

Таблица

№	Базисные элементы			Взаимодействие элементов		
	y_1	y_2	y_3	y_2y_1	y_3y_1	y_3y_2
1	x_1	x_2	x_3	$y_1y_2^2$	$y_1y_2y_3$	$y_1y_3^2$
2	x_1	x_2^2	x_2x_3	$y_1y_2^2$	$y_1y_2y_3$	$y_1y_3^2$
3	x_1	x_2^2	x_3	$y_1y_2^2$	$y_1y_2^2y_3$	$y_2^2y_3^3$
4	x_1	x_2^2	x_2x_3	$y_1y_2^2$	$y_1y_2^2y_3$	$y_2^2y_3^3$
5	x_1	x_2^2	$x_1x_2x_3^2$	$y_1y_2^2$	$y_2^2y_3^2$	$y_1y_2^2y_3^3$
6	x_1	x_2^2	x_3^3	$y_1y_2^2$	$y_2^2y_3^2$	$y_1y_2^2y_3^3$
7	x_1	x_2^2	$x_1x_2x_3^2$	$y_1y_2^2$	$y_2y_3^2$	$y_2^2y_3^3$
8	x_1	x_2^2	x_3^3	$y_1y_2^2$	$y_2y_3^2$	$y_2^2y_3^3$
9	x_1	x_2^2	$x_1x_3^2$	$y_1y_2^2$	$y_1y_3^3$	$y_2^2y_3^3$
10	x_1	x_2^2	$x_2^2x_3^3$	$y_1y_2^2$	$y_1y_3^3$	$y_2^2y_3^3$
11	x_1	x_2^2	$x_1x_3^2$	$y_1y_2^2$	$y_1y_3^3$	$y_1y_2y_3^2$
12	x_1	x_2	$x_2^2x_3^3$	$y_1y_2^2$	$y_1y_3^3$	$y_1y_2y_3^2$

2) $x_1 = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$, $x_2^2 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 2\,0\,1 \end{pmatrix}$, $x_2x_3 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 2\,0\,3\,1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что если во втором базисе все 0 заменить на 1 и наоборот, то получим подстановки, соответствующие первому базису. Так как другой способ перенумеровывания неприемлем для $x_1 = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$, то можно утверждать, что симметрическая группа S_{n+1} имеет $\frac{2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot n!}{2}$ качественно различных базисов $\{y_i\}_{i=1}^{n}$.

Таким образом, нами получен способ нахождения всевозможных базисов $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ симметрической группы S_{n+1}, удовлетворяющих условиям $y_1^2 = y_2^3 = \ldots = y_n^{n+1} = e$.

Список литературы

1. *Казинец В. А.* Копредставление симметрической группы // XXXIV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е. В. Золотова «Фундаментальные проблемы математики и информационных наук»: тезисы докладов / Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2009. С. 33—35.

2. *Мендель В. В.* Умножение в симметрической группе в терминах порождающий и соотношений // Сборник статей аспирантов и студентов Дальневосточного государственного гуманитарного университета. Хабаровск: изд-во ДВГГУ, 2012. С. 297—303.
3. *Фробениус Г.* Теория характеров и представлений групп. Харьков: Научно-техническое изд-во, 1937. 214 с.

* * *

Mendel Vasilii V.

VARIOUS BASES OF THE SYMMETRIC GROUP *Sn+1*, FROM *n* CYCLES OF LENGTH FROM 2 TO *n+1*.

(Far Easten State University of Humanities, Khabarovsk)

The article provides a way of finding some bases of the symmetric group S_{n+1}. As a condition is taken that the elements of the basis $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ satisfy the equation $y_1^2 = y_2^3 = ... = y_n^{n+1} = e$. The article describes a number of such bases, algorithms for finding them and some conclusions.

Key words: Symmetric group, cycle, basis, representation.

References

1. Kazinets V. A. A Presentation of the Symmetric Group [Kopredstavlenie simmetricheskoy gruppy]. *XXXIV Dal'nevostochnaya matematicheskaya shkola-seminar imeni akademika E. V. Zolotova «Fundamental'nye problemy matematiki i informatsionnykh nauk»: tezisy dokladov* (Far Eastern Mathematical School Seminar, named after E. V. Zolotov "Fundamental Problems of Mathematics and Information Science": Book of abstracts). Khabarovsk, TOGU Publ., 2009, pp. 33—35.
2. Mendel V. V. Multiplication in the Symmetric Group in Terms of Generators and Relations [Umnozhenie v simmetricheskoy gruppe v terminakh porozhdayushchiy i sootnosheniy]. *Sbornik statey aspirantov i studentov Dal'nevostochnogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* (Collection of Articles by Postgraduate Students of the Far Eastern State University of Humanities). Khabarovsk, DVGGU Publ., 2012, pp. 297—303.
3. Frobenius G. *Teoriya kharakterov i predstavleniy grupp* (The Theory of Characters and Group Representations), Kharkov, Scientific and Technical Publ., 1937. 214 p.

* * *