

УДК 536.25

Л. С. Гринкруг, С. В. Соловьев, Р. И. Цой**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ**

Целью работы является математическое моделирование нестационарного конвективного теплообмена электропроводной жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами (моделирующего жидкое ядро Земли) с учетом внутренних источников теплоты.

Ключевые слова: теплообмен, электропроводность жидкости, цилиндрический слой.

Lev S. Grinkrug, Sergey V. Solovyev, Rudolf I. Choi
HEAT TRANSFER MODELING OF ELECTROCONDUCTING FLUID
IN THE CYLINDRICAL LAYER

(Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan)

The aim of the work is mathematical modeling of unsteady convective heat transfer of electroconducting fluid between two rotating coaxial cylinders (simulating the Earth's liquid core). Internal heat sources are taken into account.

Key words: heat transfer, electroconducting fluid, cylindrical layer.

В работе исследуются температурные и магнитные поля при заданном поле скорости (т. е. используется кинематическая модель) между коаксиальными цилиндрами и наличии внешнего температурного и магнитного поля. Для решения поставленной задачи был разработан и создан программный продукт для исследования влияния поля скорости на структуру магнитного и температурного полей жидкости.

В работе рассматривается движение электропроводной жидкости, заключенной между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 (рис. 1), при наличии магнитного и температурного полей.

Математическая модель, описывающая магнитное поле и теплообмен электропроводной жидкости между коаксиальными цилиндрами, в операторном виде представлена уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{V} + \nu_m \Delta \mathbf{B},$$

Гринкруг Лев Соломонович — кандидат технических наук, доцент, ректор (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: rectorat@pgusa.ru

Соловьев Сергей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: solovjovsv@rambler.ru

Цой Рудольф Ирсуневич — кандидат технических наук, доцент (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: no_formal@mail.ru

© Гринкруг Л. С., Соловьев С. В., Цой Р. И., 2013

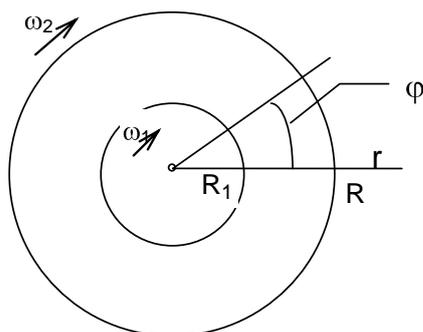


Рис. 1. Физическая постановка задачи

$$c\rho \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right] = \lambda \Delta T + q_v + \frac{V_m}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{B})^2.$$

В безразмерном виде система имеет вид:

$$\begin{aligned} c1 \frac{\partial B_r^*}{\partial Fo} + \text{Pe} \left[V_r^* \frac{\partial B_r^*}{\partial r^*} + \frac{V_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial B_r^*}{\partial \varphi^*} \right] &= \text{Pe} \left[B_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} + \frac{B_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \varphi^*} \right] \\ &= \frac{1}{\text{Pr}_m} \left(\frac{\partial^2 B_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial B_r^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 B_r^*}{\partial \varphi^{*2}} - \frac{B_r^*}{r^{*2}} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial \varphi^*} \right) \end{aligned} \quad (1),$$

$$\begin{aligned} c1 \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial Fo} + \text{Pe} \left[V_r^* \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial r^*} + \frac{V_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial \varphi^*} \right] &= \\ &= \text{Pe} \left[B_r^* \frac{dV_\varphi^*}{dr^*} + \frac{B_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial V_\varphi^*}{\partial \varphi^*} - \frac{B_r^* V_\varphi^*}{r^*} + \frac{B_\varphi^* V_\varphi^*}{r^*} \right] + \\ &+ \frac{1}{\text{Pr}_m} \left(\frac{\partial^2 B_\varphi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 B_\varphi^*}{\partial \varphi^{*2}} - \frac{B_\varphi^*}{r^{*2}} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial B_r^*}{\partial \varphi^*} \right) \end{aligned} \quad (2),$$

$$\begin{aligned} c1 \frac{\partial T^*}{\partial Fo} + \text{Pe} \left[V_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{V_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \varphi^*} \right] &= \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^{*2}} + \\ &+ Q_v + \frac{\text{Ha}^2 \text{PrK}}{\text{Re}_m^2} \left[\frac{B_\varphi^{*2}}{r^{*2}} + \left(\frac{\partial B_\varphi^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{2B_\varphi^*}{r^*} \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \left(\frac{\partial B_r^*}{\partial \varphi^*} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{2}{r^*} \left(\frac{\partial B_r^*}{\partial \varphi^*} \frac{B_\varphi^*}{r^*} + \frac{\partial B_r^*}{\partial \varphi^*} \frac{\partial B_\varphi^*}{\partial r^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (3).$$

В уравнениях (1–3) использованы следующие безразмерные переменные и критерии подобия:

$$B_r^* = \frac{B_r}{B_0} - \text{радиальная составляющая магнитной индукции};$$

$$B_\varphi^* = \frac{B_\varphi}{B_0} - \text{угловая составляющая магнитной индукции};$$

$$T^* = \frac{T - T_2}{(T_1 - T_2)} - \text{температура};$$

$$r^* = \frac{r}{R_2} - \text{безразмерный радиус};$$

$$Fo = \frac{at}{R_2^2} - \text{число Фурье};$$

$$Re_m = \frac{V_0 R_2}{\nu_m} - \text{магнитное число Рейнольдса, определяет преобладаю-}$$

щий эффект (эффект вмерзновенности магнитного поля в среду или эффект диффузии «проскальзывания») магнитного поля относительно среды;

$$Pe = \frac{V_0 R_2}{a} - \text{число Пекле, характеризует соотношение между переносом}$$

теплоты конвекцией и теплопроводностью;

$$Q_v = \frac{q_v R_2^2}{a(T_1 - T_2)} - \text{внутренний источник тепла};$$

$$Ha = \frac{B_0 R_2}{\sqrt{4\pi\rho_0\nu\nu_m}} - \text{число Гартмана, характеризует соотношение между}$$

силами магнитной вязкости и вязкими силами; критерий можно рассматривать как численную характеристику влияния магнитного поля на движение электропроводной жидкости;

$$Pr = \frac{\nu}{a}; Pr_m = \frac{\nu_m}{a} - \text{гидродинамическое и магнитное число Прандтля};$$

$$K = \frac{V_0^2}{c(T_1 - T_2)} - \text{характеризует кинетическую энергию единицы массы}$$

среды по сравнению с перепадом теплосодержания (между температурами среды и находящегося в ней твердого тела) [3];

$$Q = \frac{qR_2}{\lambda(T_1 - T_2)} - \text{поток тепла на границе, } c1 - \text{const.}$$

В начальный момент времени поля магнитной индукции и температуры принимали постоянное значение. Граничные условия на внутренней ($\Gamma_1=R_1$) и внешней ($\Gamma_2=R_2$) границе следующие: для магнитного поля задаются граничные условия первого рода, а для температурного

поля задаются граничные условия: а) первого рода на обеих границах; б) второго рода на внутренней границе и первого — на внешней.

Исследуется кинематическая модель, рассматриваются два случая задания поля скорости:

- внутренний и внешний цилиндры вращаются с разными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 соответственно;
- внутренний и внешний цилиндры неподвижны.

В первом случае распределение поля скорости имеет вид:

$$V_{\varphi}(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Во втором случае распределение поля скорости имеет вид:

$$V_r(r, \varphi) = -(r - R_1)(R_2 - r)(C_1 + C_2 \cdot r) \cos(C_3 \cdot \varphi),$$

$$V_{\varphi}(r, \varphi) = (r - R_1)(R_2 - r)(C_1 + C_2 \cdot r) \sin(C_3 \cdot \varphi),$$

где C_1 , C_2 и C_3 — произвольные константы, задающие вид поля скорости.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений использовался метод Патанкара [1]. При решении системы разностных аналогов использовался метод Гаусса-Зейделя.

Локальные числа Нуссельта для внутреннего и внешнего цилиндра определяются из следующих соотношений:

$$Nu_{in}(\varphi) = -\frac{R_1}{R_2} \frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial n} \Big|_{r=R_1}, \quad Nu_{out}(\varphi) = -\frac{\partial T(r, \varphi)}{\partial n} \Big|_{r=R_2}.$$

Осредненные числа Нуссельта вычислялись по формулам:

$$\overline{Nu}_{in} = -\frac{R_1}{\pi R_2} \int_{\pi}^0 Nu_{in}(\varphi) d\varphi, \quad \overline{Nu}_{out} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 Nu_{out}(\varphi) d\varphi.$$

Для математического моделирования исследуемого процесса был разработан программный комплекс [2], позволяющий рассчитывать поля температуры и магнитной индукции в широком диапазоне изменения безразмерных критериев. В качестве результатов расчета получены поле температуры, радиальная и угловая составляющие магнитной индукции.

На рис. 2 представлен фрагмент интерфейса программного комплекса.

На рис. 3 представлены поле скорости (а), числа Нуссельта (б), поле температуры (в), полная магнитная индукция (г), радиальная составляющая магнитной индукции (д), угловая составляющая магнитной индукции (е) для значений безразмерных параметров: $Pe=40$, $Pr_m=2$, $Q_v=0$, $Pr=1$, $Re_m=1$, $Ha=1$, $Fo \rightarrow \infty$, $K=1$ (граничные условия: $Br_1=1$, $Br_2=1$, $V\varphi_1=0$, $V\varphi_2=0$, $T_1=1$, $T_2=0$).

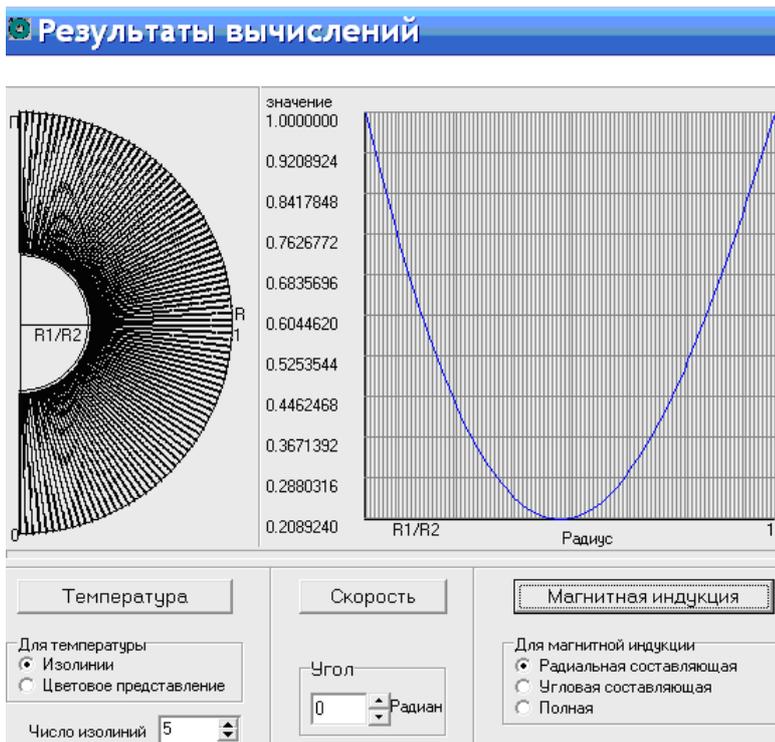
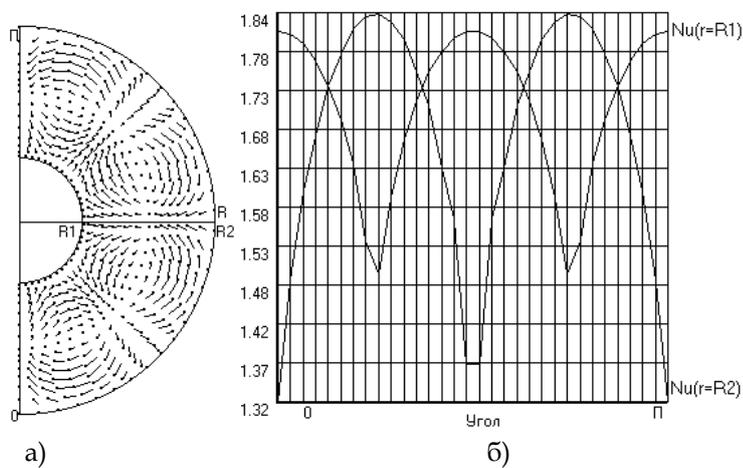


Рис. 2. Радиальная составляющая магнитной индукции

Уравнения поля скорости:
$$\begin{cases} V_r = -(r - 0,5)(1 - r)(7,5 - 10r) \cos(4\varphi) \\ V_\varphi = (r - 0,5)(1 - r)(7,5 - 10r) \sin(4\varphi) \end{cases}$$



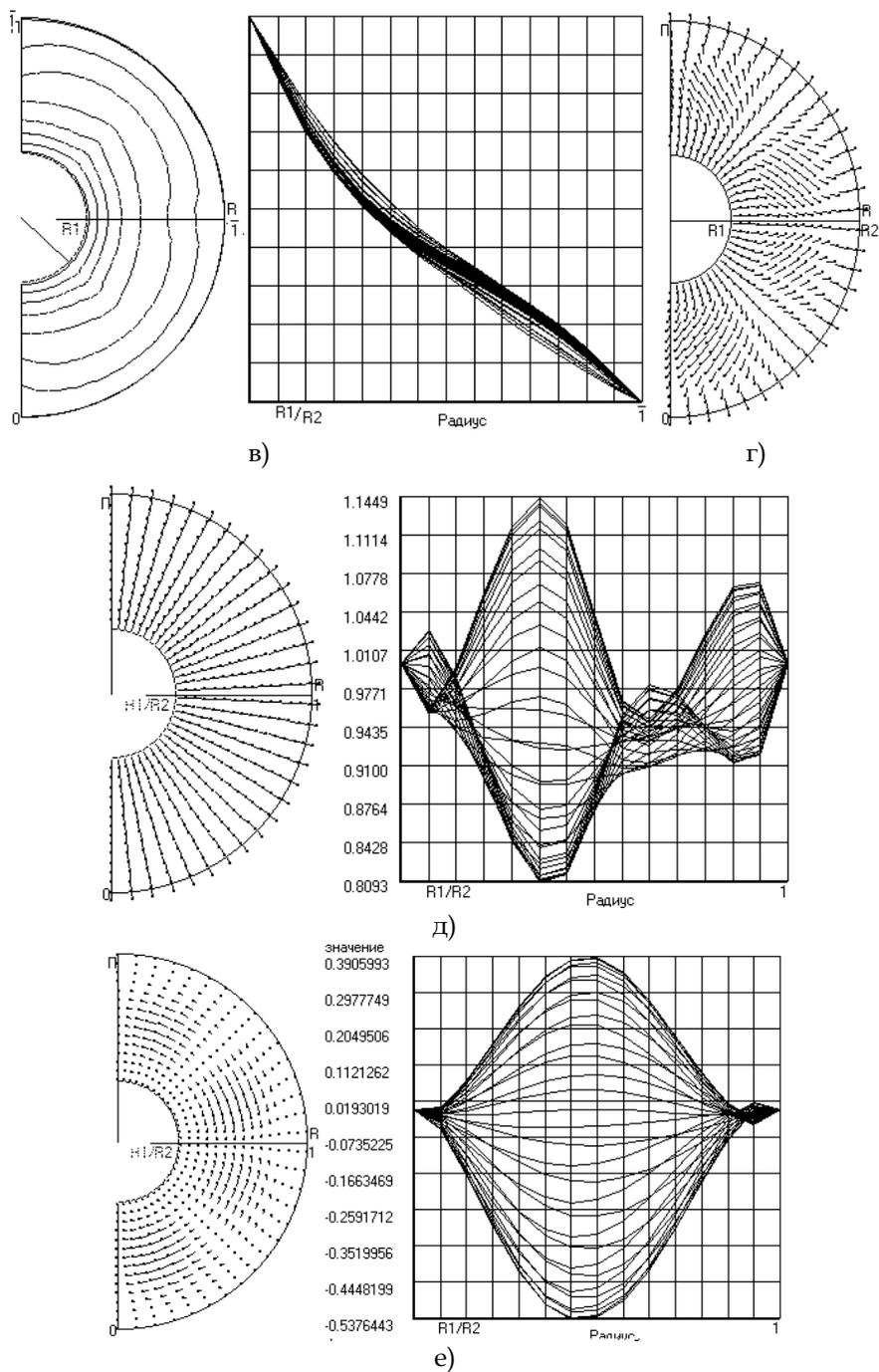


Рис. 3. Расчетные поля

На рис. 4 представлено поле температуры с учетом джоулева тепловыделения для значений безразмерных параметров: $Re=40$, $Pr_m=1$, $Q_v=0$, $Pr=1$, $Re_m=1$, $Na=7$, $Fo \rightarrow \infty$, $K=1$. Граничные условия: $B_{r1}=1$, $B_{r2}=1$, $B_{\varphi1}=0$, $B_{\varphi2}=0$, $T_1=1$, $T_2=0$.

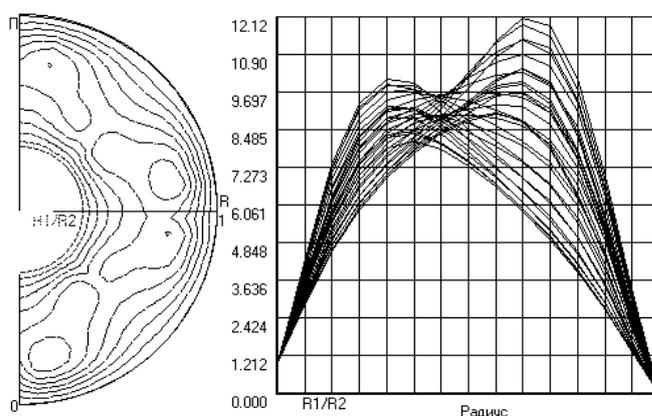


Рис. 4. Поле и распределение температуры

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в канале. / Пер. с англ. Е. В. Калабина; под ред. Г. Г. Янькова. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 312 с., ил.
2. Соловьев С. В. Моделирование конвективного теплообмена электропроводной жидкости между вращающимися цилиндрами. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2012613609. Москва, 2012.

* * *