ТЕХНИЧЕСКИЕ, ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 681.323(075)

А. П. Бахрушин

РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ ПО СИСТЕМАМ ЕДИНИЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ И ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ

В статье рассматриваются возможность представления сигнала в виде временного или пространственного спектра путем его разложения по системам единичных импульсов и дельта-функций. Выводятся соотношения для определения коэффициентов разложения. Отмечается, что эти системы идеально подходят для временной (или пространственной) локализации всевозможных резких изменений анализируемого сигнала, т. е. для анализа его структурных особенностей.

Ключевые слова: спектр, сигнал, коэффициенты разложения, единичные импульсы, дельта функция.

Alexander P. Bahrushin

SIGNAL DECOMPOSITION BY SYSTEM OF UNIT IMPULSES AND DELTA-FUNCTIONS

(Sholom-Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan)

The opportunity of signal presentation in a form of temporal or spatial spectra by its decomposing with system of unit impulses and delta-functions is discussed in this paper. The equations for calculation of decomposition coefficients are derived. It is noted that these systems of functions are ideal for temporal or spatial localization of all kinds of analyzed signal sharp changes, namely for analyzing its structural peculiar properties.

Keywords: spectra, signal, decomposition coefficients, unit impulses, delta-functions.

Среди различных аспектов обобщенной спектральной теории сигналов, оказывающих непосредственное влияние на методы синтеза алгоритмических и аппаратных средств, особое место занимают вопросы формирования конкретных систем базисных функций. Разложение сигнала по некоторой системе базисных функций и его представление в виде спектра является универсальной формой его аналитического описания в линейной теории сигналов. Это же относится и к форме представления сигнала $s(x)$ в виде функции временной или пространствен-

Бахрушин Александр Петрович — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информатики и вычислительной техники (Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан), e-mail: stripylife@yahoo.com.

ной координаты. Такую форму представления сигнала можно рассматривать как временной или пространственный спектр, т. е. как результат разложения сигнала по системам единичных импульсов или дельта-функций. Так, например, в пространственном спектре сигнала $s(x)$ переменная x представляет собой пространственную координату, которая может возрастать или убывать, а также принимать как положительные, так и отрицательные значения [1—3].

Рассмотрим особенности формирования пространственного спектра на основе тех или иных систем базисных функций. Допустим, что некоторый сигнал задан на одностороннем интервале $[0,\ X/2)$. Предположим также, что подлежащие анализу сигналы являются ступенчатыми с шириной ступени Δx, как показано на рис. 1.

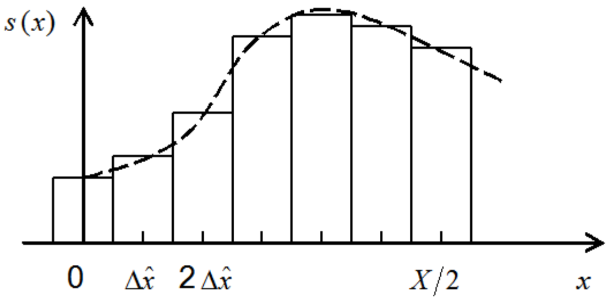

Рис. 1. Представление сигнала $s(x)$ в виде ступенчатой функции

Допустим, что на интервале $[0,\ X/2)$ укладывается n таких полных ступенек. В дальнейшем для того, чтобы распространить полученные результаты на непрерывные сигналы, перейдем к пределу $\Delta\hat{x} \to 0$. Очевидно, что число ступенек в этом случае $n \to \infty$. Рассмотрим возможность построения системы базисных функций для разложения сигнала $s(x)$ на основе единичных импульсов $\delta_1(x)$, которые формируются следующим образом.

Введем каузальную функцию, описывающую прямоугольный импульс:

$$rect(t) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{1}{2} \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \textit{при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Сделаем подстановку $t = x/\Delta x$. В этом случае:

$$rect\left(\frac{x}{\Delta\hat{x}}\right) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{\Delta\hat{x}}{2} \le x \le \dfrac{\Delta\hat{x}}{2}, \\ 0, & \textit{при остальных значениях } x. \end{cases}$$

При сдвиге импульса вправо на величину x_1 имеем:

$$rect\left(\frac{x-x_1}{\Delta x}\right)=\begin{cases}1, & \left(x_1-\frac{\Delta\hat{x}}{2}\right)\le x\le\left(x_1+\frac{\Delta\hat{x}}{2}\right),\\ 0, & \textit{при остальных значениях } x.\end{cases}$$

Тогда функцию единичного импульса можно записать как:

$$\delta_1(x)=\lim_{\Delta\hat{x}\to 0} rect\left(\frac{x}{\Delta\hat{x}}\right).$$

На рис. 2 изображены системы четных $\{E(k,x)\}$ и нечетных $\{\theta(k,x)\}$ функций, построенные на основе единичных импульсов.

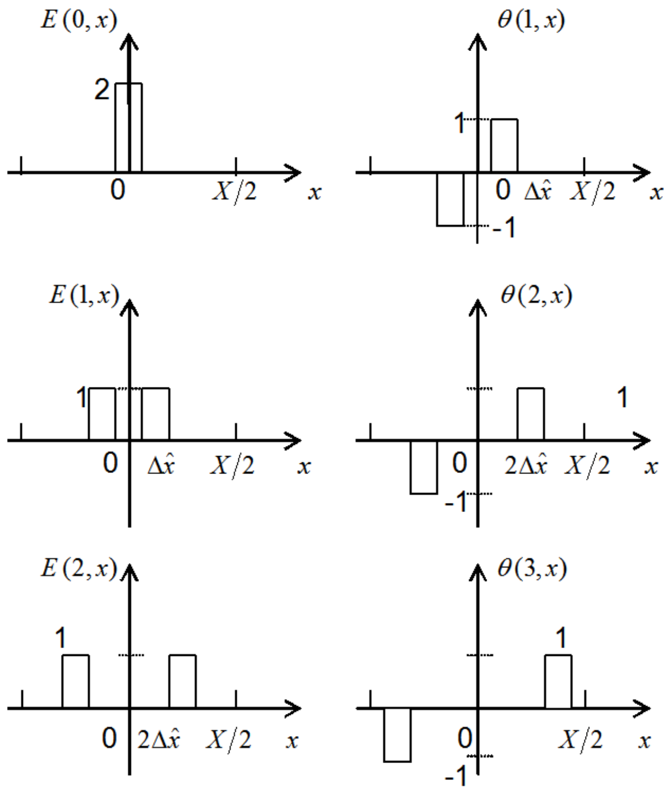

Рис. 2. Система четных $\{E(k,x)\}$ и нечетных $\{\theta(k,x)\}$ базисных функций

Системы базисных функций $\{E(k,x)\}$ и $\{\theta(k,x)\}$ сформированы таким образом, что входящие в них функции не перекрываются по пространственной координате x, чем и обеспечивается ортогональность каждой из рассматриваемых систем.

Аналитически четные функции могут быть записаны в виде:

$$E(k,\,x)=\begin{cases} 2\;rect\left(\dfrac{x}{\Delta\hat{x}}\right), & k=0,\\[2ex] rect\left(\dfrac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+rect\left(\dfrac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right), & k\neq 0.\end{cases} \tag{1}$$

Их средняя мощность на интервале $[0,\ X/2)$ равна:

$$P=\begin{cases} \dfrac{4\Delta\hat{x}}{X}, & k=0,\\[2ex] \dfrac{2\Delta\hat{x}}{X}, & k\neq 0.\end{cases}$$

Запишем выражение, определяющее разложение сигнала $s_1(x)$ в ряд Фурье по системе четных функций, построенных на основе единичных импульсов:

$$s_1(x)=\sum_{k=0}^{n}C_1(k)\left[\;rect\left(\frac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+\;rect\left(\frac{x+k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)\right]. \tag{2}$$

В свою очередь, коэффициенты разложения можно определить через прямое преобразование:

$$C_1(k)=\frac{1}{\Delta\hat{x}}\int_0^{X/2}s_1(x)\;rect\left(\frac{x}{\Delta\hat{x}}\right)dx\text{, при }k=0,$$

$$C_1(k)=\frac{1}{\Delta\hat{x}}\int_0^{X/2}s_1(x)\left[rect\left(\frac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+rect\left(\frac{x+k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)\right]\text{, при }k\neq 0.$$

Очевидно, что по системе прямоугольных импульсов можно разложить не любой сигнал, а лишь сигнал, имеющий ступенчатую форму. Поэтому такая система является полной только для подмножества ступенчатых сигналов с шириной ступени $\Delta\hat{x}$.

Для приведения данной системы к полной для любого непрерывного сигнала необходимо в приведенных выражениях перейти к пределу при условии $\Delta\hat{x}\to 0$. В этом случае дискретная переменная $k\Delta\hat{x}$ переходит в непрерывную переменную $\hat{x}$ и выражение (1) преобразуется к виду:

$$E(x,\,\hat{x})=\begin{cases} 2\,u(x), & \hat{x}=0,\\[2ex] u(x-\hat{x})+u(x+\hat{x}), & \hat{x}\neq 0.\end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что четная базисная система является функцией двух переменных — пространственной координаты x и величины смещения $\hat{x}$ единичных импульсов.

Разделим и умножим (2) на $\Delta\hat{x}$

$$s_1(x) = \sum_{k=0}^{n} C_1(k)\left[\frac{1}{\Delta\hat{x}}\, rect\left(\frac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right) + \frac{1}{\Delta\hat{x}}\, rect\left(\frac{x+k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)\right]\Delta\hat{x} \tag{4}$$

и перейдем к пределу при $\Delta\hat{x} \to 0$. Тогда разложение сигнала $s_1(x)$ будет иметь не вид суммы, а вид интеграла:

$$s_1(x) = \int_0^{X/2} C_1(\hat{x})[\delta(t-\hat{x}) + \delta(t+\hat{x})]\, d\hat{x},$$

где

$$C_1(\hat{x}) = \int_0^{X/2} s_1(x)\delta(x)\, dx, \text{ при } \hat{x} = 0,$$

$$C_1(\hat{x}) = \int_0^{X/2} s_1(x)\delta(x-\hat{x}) + \delta(x-\hat{x})\, dx, \text{ при } \hat{x} \neq 0.$$

Аналогичным образом производится разложение сигнала на том же интервале по системе нечетных функций:

$$\theta(x,\hat{x}) = u(x-\hat{x}) - u(x+\hat{x}).$$

При $\Delta\hat{x} \to 0$ получаем:

$$s_2(x) = \int_0^{X/2} C_2(\hat{x})[\delta(t-\hat{x}) - \delta(t+\hat{x})]\, d\hat{x},$$

где

$$C_2(\hat{x}) = \int_0^{X/2} s_2(x)\delta(x-\hat{x}) - \delta(x+\hat{x})\, dx.$$

Рассмотрим возможность разложения сигналов на интервале $[0, X/2)$ по базисным системам $\{E(k,x)\}$ и $\{\theta(k,x)\}$, сформированным на основе дельта-функций. Моделями таких систем могут считаться функции, изображенные на рис. 2 с той разницей, что амплитуды прямоугольных импульсов у них определяются отношением $1/\Delta\hat{x}$. Четные функции в этом случае могут быть представлены в виде:

$$E(k,x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\dfrac{x}{\Delta\hat{x}}\right), & k=0,\\[2ex] \dfrac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\dfrac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+\dfrac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\dfrac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right), & k\neq 0.\end{cases}$$

Их средняя мощность на интервале $[0,\ X/2)$ равна:

$$P=\begin{cases}\dfrac{4}{\Delta\hat{x}\,X}, & k=0,\\[2ex] \dfrac{2}{\Delta\hat{x}\,X}, & k\neq 0.\end{cases} \tag{5}$$

По аналогии с (4) запишем разложение ступенчатого сигнала $s_1(x)$ по системе функций $\{E(k,x)\}$:

$$s_1(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_1(k)}{\Delta\hat{x}}\left[\frac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\frac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+\frac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\frac{x+k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)\right]\Delta\hat{x},$$

где

$$\frac{C_1(k)}{\Delta\hat{x}}=\int_0^{X/2}s_1(x)\,\frac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\frac{x}{\Delta\hat{x}}\right)dx,\ \text{при}\ k=0,$$

$$\frac{C_1(k)}{\Delta\hat{x}}=\int_0^{X/2}s_1(x)\left[\frac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\frac{x-k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)+\frac{1}{\Delta\hat{x}}\,rect\left(\frac{x+k\Delta\hat{x}}{\Delta\hat{x}}\right)\right]dx\ \text{при}\ k\neq 0.$$

Для разложения непрерывных сигналов необходимо перейти к пределу при $\Delta\hat{x}\to 0$. В результате будет получено выражение аналогичное (2), которое представляет собой разложение сигнала не по системе единичных импульсов, а по системе дельта функций:

$$E(x,\hat{x})=\begin{cases}2\delta(x), & \hat{x}=0,\\ \delta(x-\hat{x})+\delta(x+\hat{x}), & \hat{x}\neq 0.\end{cases}$$

Таким же образом нетрудно показать, что сигнал $s_2(x)$ можно разложить на интервале $[0,\ X/2)$ по системе нечетных функций

$$\theta(x, \hat{x}) = \delta(x - \hat{x}) - \delta(x + \hat{x})$$

и получить выражение, аналогичное (4).

Несмотря на то, что аналитическое описание пространственных спектров $C_1(\hat{x})$ и $C_2(\hat{x})$ совпадает независимо от используемого подхода к их формированию, интерпретировать эти спектры можно по-разному.

При конечном интервале определения сигнала более удобной представляется трактовка пространственного спектра как результата разложения сигнала в предельный ряд Фурье по системе единичных импульсов. В этом случае такие импульсы могут иметь сколь угодно малую, но все же конечную мощность.

При рассмотрении сигнала на бесконечном интервале можно исходить из того, что мощность дельта-функций является конечной величиной. Действительно, так как в этом случае выражение (5) определяется при $\Delta\hat{x} \to 0$ и $X \to \infty$, то их произведение $\Delta\hat{x}\,X$, в соответствии с определением дельта-функции, может считаться величиной постоянной.

Поэтому на бесконечном интервале определения сигнала более приемлемой следует считать интерпретацию пространственных спектров, как интегралов Фурье по системе базисных дельта-функций.

Необходимо отметить, что так как согласно определению ширина дельта-функции бесконечно мала, то она идеально подходит для временной (или пространственной) локализации всевозможных резких изменений анализируемого сигнала, т. е. с помощью дельта-функции можно отразить все его структурные особенности. В то же время полученный таким образом спектр является исключительно временным (пространственным) спектром, т. е. не содержит информации о частотном составе анализируемого сигнала.

Список литературы

1. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Советское радио, 1972. 352 с.
2. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 397 с.
3. *Солодовников А. И., Спиваковский А. И., Канатов И. И.* Синтез обобщенного спектрально ядра произвольной размерности // Применение ортогональных методов при обработке сигналов и анализе систем: межвузовский сборник. Свердловск: Изд-во УПИ, 1980. с. 15—22.

* * *