

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.938; 530.18

К. В. Шлюфман, Б. Е. Фишман, Е. Я. Фрисман

### МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И АНАЛИЗА ИНТЕРВАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

*Дано определение интервально-периодической динамики системы, описываемой рекуррентными уравнениями. Для качественного анализа решений одномерных рекуррентных уравнений предложено использовать портреты в псевдофазовом пространстве с большим лагом. Разработаны два метода обнаружения интервально-периодических решений: 1) реализация процедуры кластерного анализа; 2) использование спектрального анализа.*

**Ключевые слова:** рекуррентное уравнение, интервально-периодическое решение, псевдофазовое пространство, кластерный анализ, спектральный анализ.

**Konstantin V. Shlufman, Boris E. Fishman, Efim Ya. Frisman. METHODS OF DETECTION AND ANALYSIS OF INTERVAL-PERIODIC DYNAMICS (ICARP FEB RAS, Far Eastern State Academy for Social and Humanity Studies)**

*The definition of interval-periodic dynamics of a system has given. For qualitative analysis of one-dimensional recurrence equations solutions has proposed to use the pseudo phase space with a large lag. Two methods for detection of interval-periodic solutions have developed.*

**Keywords:** recurrence equation, interval-periodic solution, phase space, cluster analysis, spectral analysis.

#### **Введение**

При исследовании динамических систем особое значение имеет устойчивость решения. Понятие устойчивости в математике формализуется различными способами. Наиболее часто для формализации устойчивости решения используется критерий устойчивости по Ляпунову (см., например, [3]). Соответствующий этому критерию показатель Ляпунова своим значением однозначно представляет характер решения. Отрицательные значения

указывают на то, что решения устойчивы, а положительные — на то, что они неустойчивы. При этом устойчивость означает, что близкие (в смысле метрики пространства состояний динамической системы) решения в дальнейшем остаются близкими. Неустойчивость, напротив, означает, что близкие решения экспоненциально отдаляясь друг от друга в будущем (если динамическая система рассматривается во времени) будут сколь угодно далеки. Не устойчивые по Ляпунову решения динамических систем принято называть хаотическими.

Отсюда следует, что, если решение устойчиво по Ляпунову, то возможен прогноз динамики состояния системы (что важно для практических приложений). В то же время прогноз состояния системы с хаотическим поведением, необходимый для конкретной практической ситуации, может оказаться не реализуемым.

В совокупности хаотических режимов, имеющих место для динамических систем вида

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad (1)$$

где  $x_n$  — значение описывающее состояние системы в момент  $n$ ,  $F$  — оператор, однозначно определяющий состояние системы в последующий момент по предыдущему состоянию, можно выделить особые (интервально-периодические) режимы. Для таких режимов по текущему состоянию системе  $x_n$ , оцененному с некоторой погрешностью, возможно получение, в качестве прогноза, интервала значений  $X$ , в котором система в интересующий момент  $n+m$  окажется с вероятностью 1,00 ( $x_{n+m} \in X$ , где  $m$  — количество моментов, на которое выполняется прогноз).

Название «интервально-периодический» отражает характер решения  $\{x_n\}$  системы (1). Решение  $\{x_n\}$  содержит значения из конечного числа взаимно непересекающихся интервалов, причем имеет место регулярный цикл обхода этих интервалов. Формально интервально-периодический режим определен следующим образом.

Динамический режим системы (1) будем называть интервально-периодическим, если существуют не менее двух взаимно непересекающихся интервалов значений  $X_k$ ,  $k = \overline{1, l}$ ,  $l \geq 2$ , ( $X_k \cap X_s = \emptyset$ ,  $k \neq s$ ) и для любого натурального  $n$  можно установить соответствие  $x_n \in X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ , то для любого натурального  $m$  выполняется  $x_{n+m} \in X_s$ , если  $n+m \equiv n \pmod{l}$ .

Другими словами интервально-периодический режим представляет собой цикл конечной длины с флуктуирующими элементами цикла. В литературе этот режим упоминается как шумящий цикл. По нашему мнению, название «шумящий цикл» менее адекватно характеру описанной динамики.

В дальнейшем не устойчивые по Ляпунову динамические режимы, не соответствующие определению интервально-периодических режимов, называются просто хаотическим.

Для исследования интервально-периодических решений одномерных динамических систем (1), для которых оператор  $F$  определен функционально, были опробованы три метода анализа. Метод качественного исследования решения, основанный на его портрете в псевдофазовом пространстве  $(x_n, x_{n+m})$  с переменным лагом  $m$ . Рассмотрены также два альтернативных метода обнаружения интервально-периодических решений: применение процедур кластерного анализа; использование спектрального анализа. Заметим, что указанные методы могут быть адаптированы для исследования систем и с большей размерностью.

### **Псевдофазовые портреты с большим лагом**

Метод качественного исследования решения с помощью портретов использует картину расположения точек  $(x_n, x_{n+m})$  на портретах в псевдофазовых пространствах. Такой портрет строится парами значений последовательности решения  $\{x_n\}$  системы (1), отстоящих друг от друга на  $m$  итераций (лаг).

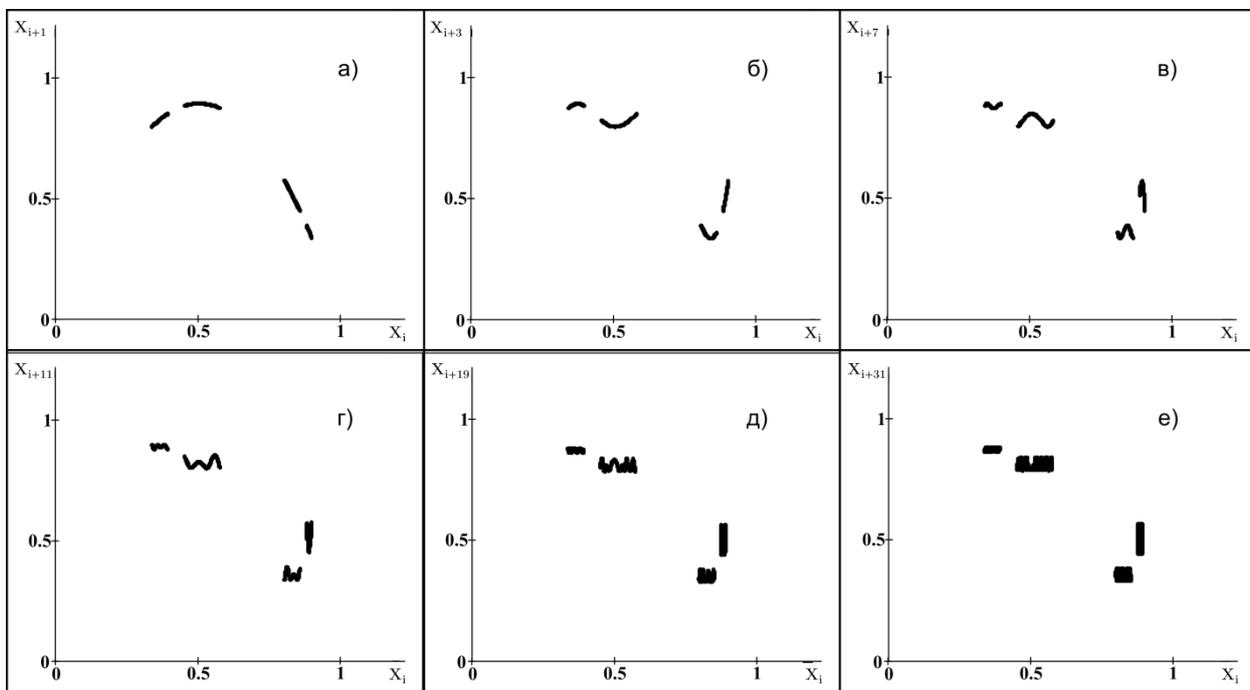
Когда лаг  $m=1$ , тогда пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  располагаются на графике оператора  $F(x)$  одномерной системы (1). При этом в случае периодического решения  $\{x_n\}$  на портрете видно количество точек равно периоду решения. В случае интервально-периодического решения на портрете парами  $(x_n, x_{n+m})$  выделяются фрагменты графика оператора  $F(x)$ , причем количество этих фрагментов равно количеству интервалов  $l$  интервально-периодического решения. В случае если решение является хаотическим (не удовлетворяет определению интервально-периодической динамики), то пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  выделяют один единственный фрагмент графика.

Увеличение лага  $m$  псевдофазового пространства изменяет на портрете вид выделяемых парами  $(x_n, x_{n+m})$  фрагментов отображения  $\underline{F} \text{---} F(x) = F^{(m)}(x)$ , но не изменяет значение  $l$  — количества фрагментов.

Отметим, что для системы, имеющей интервально-периодическое решение, при больших значениях лага ( $m > 50$ ) выделенные  $l$  фрагментов отображения  $F^{(m)}(x)$  преобразуются в  $l$  прямоугольных областей. При этом прямоугольная форма областей отображает хаотическое поведение значений последовательности решений внутри выделенных интервалов  $X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ , причем сохраняется периодический порядок последовательности «выбора» этих интервалы.

Расположение областей в псевдофазовом пространстве зависит от соотношения значений  $m$  и  $l$ . В случае  $m=l \cdot k+1$ , где  $k$  — натуральное число, на портрете области пар значений располагаются вдоль графика оператора  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Во всех остальных случаях области не располагаются вдоль графика  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Если  $m=l \cdot k$ , где  $k$  — натуральное число, то области выстраиваются на биссектрисе первого квадранта псевдофазового пространства. Это означает, что через  $m$  итераций значение  $x_{n+m}$  последовательности  $\{x_n\}$  возвращается в тот же интервал  $X_k$ , которому принадлежало  $x_n$ .

В качестве иллюстрации на рис.1 представлено влияние лага  $m$  на портреты в псевдофазовом пространстве логистического отображения  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = a \cdot x \cdot (1-x)$  при  $a = 3.580$ .



**Рис. 1.** Влияние лага  $m$  на портреты в псевдофазовом пространстве логистического отображения при  $a = 3.580$ : а) —  $m = 1$ , б) -  $m = 3$ , в) -  $m = 7$ , г) —  $m = 11$ , д) —  $m = 19$  и е) -  $m = 31$

Из рис.1 видно, что при  $m=1$  портрет содержит четыре фрагмента графика функции  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = a \cdot x \cdot (1-x)$ . Увеличение лага  $m$  приводит к тому, что пары значений  $(x_n, x_{n+m})$  заполняют  $l$  ограниченных областей, напоминающих прямоугольники ( $l=4$ ). Причем, вне этих областей портреты не содержат ни одной пары  $(x_n, x_{n+m})$ .

Заметим, что в случае хаотического режима на псевдофазовом портрете имеется единственный фрагмент отображения  $\mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{x})$ , который при увеличении лага принимает форму прямоугольника.

## Идентификация интервально-периодического режима методом кластерного анализа

Для идентификации интервально-периодических решений одномерной динамической системы (1) разработан метод объединяющий решение двух задач: 1) определение количества интервалов  $l$  и оценка их границ; 2) проверка периодичности обхода интервалов решением уравнения.

Решение первой задачи опирается на метод кластерного анализа, позволяющий автоматически, так распределить элементы множества на подмножества, чтобы выполнялось условие близости элементов в каждом подмножестве. При этом элементы из разных подмножеств не удовлетворяют используемому условию близости. Формально условие близости задается конкретной метрикой, определенной на распределяемом множестве.

Если разделение на кластеры приводит к тому, что в один и тот же кластер входят только те значения последовательности  $\{x_n\}$ , которые принадлежат одному интервалу  $X_s$ , то полученные кластеры характеризуют интервалы  $X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ . При этом количество кластеров соответствует количеству интервалов  $l$ . Минимальные и максимальные элементы каждого кластера служат оценками границ соответствующих интервалов  $X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ .

Выделенные кластеры состояний позволяют исследовать характер решения  $\{x_n\}$ . Нумеруются кластеры состояний. Затем номера  $r$  кластеров присваиваются значениям, образовавшим кластер:  $x_{n,r}$ . Таким образом, получается последовательность с двойной индексацией:  $\{x_{n,r}\}$ . Первый индекс  $n$  соответствует номеру итерации системы (1), а второй  $r$  — номеру кластера, которому отнесено значение.

Благодаря такой двойной индексации появляется возможность исследовать порядок обхода последовательностью  $\{x_{n,r}\}$  кластеров значений. Если в последовательности состояний  $\{x_{n,r}\}$  в порядке изменения номера итерации  $n$  наблюдается периодичность в индексации по кластерам  $r$ , то можно говорить о интервально-периодическом характере решения.

Для множества значений решения  $\{x_n\}$  в качестве меры близости значений  $x_i$  и  $x_j$  использована естественная мера  $\rho(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$ .

Основным параметром процедуры построения кластеров является пороговая величина, в сравнении с которой принимается решение о включении двух элементов в один кластер. Так для построения кластеров значений  $x_n$  задается пороговая величина  $\rho_{\max}$ , с которой сравнивается расстояние  $\rho(x_i, x_j)$  между двумя значениями  $x_i$  и  $x_j$ . В случае, если расстояние

$\rho(x_i, x_j) < \rho_{\max}$ , то значения  $x_i$  и  $x_j$  считаются принадлежащими одному кластеру. Вместе с тем, корректное выделение кластеров означает, что пороговое значение  $\rho_{\max}$  выбрано меньшим, чем минимальное расстояние между интервалами  $X_s$ ,  $s = \overline{1, l}$ . Если такое условие не выполняется, то происходит объединение нескольких интервалов  $X_s$  в один кластер.

Выбор порогового значения  $\rho_{\max}$  влияет на необходимую величину  $N$  — длину последовательности значений  $\{x_n\}$ . При достаточности имеющейся статистики (соответствия величин  $\rho_{\max}$  и  $N$ ) для каждого значения  $x_n$  интервала  $X_s$  последовательности  $\{x_n\}$  найдется хотя бы одно значение  $x_k$  в последовательности  $\{x_n\}$ , принадлежащее тому же интервалу  $X_s$  и отдаленное от  $x_n$  не более чем на  $\rho_{\max}$ :  $\rho(x_n, x_k) < \rho_{\max}$ . В противном случае, образуется несколько кластеров, состоящих из значений  $x_n$  принадлежащих одному интервалу  $X_s$ .

### **Идентификация интервально-периодического режима методом спектрального анализа**

Второй альтернативный метод идентификации интервально-периодических решений одномерной динамической системы (1) состоит из двух последовательно выполняемых этапов. На первом из них выполняется проверка гипотезы о периодичности динамического режима. Если гипотеза отклоняется, то проверяется гипотеза об интервально-периодическом характере динамического режима нелинейной системы (1). На обоих этапах анализируется спектрограмма решения динамической системы (1) на Фурье частотах.

Гипотеза  $H_0$ , справедливость которой проверяется на первом этапе, заключается в предположении о том, что наблюдаемый динамический режим является периодическим. Для этого выполняется проверка равенства нулю значений спектрограммы на всех Фурье частотах и выделяются не равные нулю значения (заметим, что равенство нулю проверяется с достижимой вычислительной точностью). Если обнаруживается, что имеются значения спектрограммы, отличные от нуля, и они расположены только на эквидистантных (равноотстоящих) частотах Фурье, то принимается решение о том, что гипотеза  $H_0$  верна.

В случае принятия гипотезы  $H_0$  второй этап не выполняется. Если гипотеза  $H_0$  отвергается, это означает, что имеются значения спектрограммы, отличные от нуля (с достижимой вычислительной точностью), которые не удовлетворяют условию эквидистантности. Поскольку интервально-периодический режим представляет собой цикл конечной длины с флуктуи-

рующими элементами цикла, то в спектрограмме появляются обязательные им составляющие, отличные от нуля. Каждая из таких составляющих, которая не соответствует периодической динамике, является статистически незначимой, если присутствует периодическая динамика [1]. Поэтому может быть использована специальная гипотеза  $H_0^*$ , проверка которой позволяет обнаружить наличие цикла конечной длины на фоне флуктуаций. Такая проверка выполняется на втором этапе путем выделения статистически значимых значений спектрограммы на частотах Фурье. Если выделенные значения спектрограммы расположены на эквидистантных частотах Фурье, то динамический режим идентифицируется как интервально-периодический.

Одновременное непринятие гипотез  $H_0$  и  $H_0^*$  означает, что динамический режим является хаотическим.

Для корректного использования этого метода длина  $N$  используемого фрагмента решения  $\{x_n\}$  системы (1) выбирается равной наименьшему общему кратному всех проверяемых периодов. Нарушение условия кратности может привести к ошибочным результатам.

Спектрограмма решения уравнения (1) вычисляется по формуле [1]:

$$\rho_k^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \left( \sum_{n=1}^N x_n \cdot \exp(-i \cdot f_k \cdot n) \right)^2, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2}, \quad (2)$$

где  $x_n$  — значения рассматриваемого фрагмента решения системы (1),  $N$  — длина фрагмента решения  $\{x_n\}$ ,  $f_k = \frac{2\pi k}{N}$  — частоты Фурье,  $i$  — мнимая единица комплексных чисел.

На первом этапе метода идентифицируется периодический режим системы (1). Под периодическим режимом понимается такой динамический режим, для которого существует  $l$  чисел  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$  таких, что

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad x_{n+2} = F(x_{n+1}), \quad \dots, \quad x_n = F(x_{n+l-1})$$

Если все числа  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$  различны, то периодический режим называется циклом длины  $l$ , а число  $l$  — периодом динамического режима системы (1).

Для идентификации периодического режима проверяется равенство значений спектрограммы (2) нулю. Значение  $\rho_k^2$  считается равным нулю, если оно не больше порядка вычислительной погрешности значений спектрограммы. Для всех  $\rho_{k_j}^2 > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ , проверяется эквидистантность частот Фурье  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_q}$ . Если условие эквидистантности выполняется, то прини-

мается гипотеза  $H_0$ . В противном случае гипотеза  $H_0$  отвергается. В случае если  $q=1$ , то есть спектрограмма имеет только одно значение, отличное от нуля, гипотеза  $H_0$  принимается без проверки условия эквидистантности.

Заметим, что проверка гипотезы  $H_0$  основана на том, что спектрограммы периодических динамических режимов негармонического характера [2] имеют значения отличные от нуля  $\rho_{k_j}^2 \neq 0$ ,  $j=1, 2, \dots, q$  только на эквидистантно расположенных частотах Фурье  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_q}$ .

В случае, когда гипотеза  $H_0$  отклоняется, идентифицируется интервально-периодический режим системы (1). Для этого из значений спектрограммы (2) выделяют статистически значимые значения с уровнем значимости  $\varepsilon$ . Статистическая значимость каждого значения спектрограммы (2) проверяется критериями, описанными в [1].

В случае если  $0 < k < \frac{N}{2}$  ( $k \neq \frac{N}{2}$ ,  $k \neq 0$ ) проверка статистической значимости значения  $\rho_k^2$  выполняется с использованием статистики:

$$F = \frac{N \cdot \rho_k^2}{4 s^2},$$

где

$$s^2 = \frac{\sum_{n=1}^N x_n^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N x_n \right)^2}{N-3} - \frac{N}{2} \cdot \rho_k^2 \quad (3)$$

оценка остаточной вариации значений  $x_n$  решения системы (1), имеющей F — распределение с 2 и  $N-3$  степенями свободы  $P(x < F) = 1 - \left( 1 + \frac{2}{N-3} \cdot F \right)^{\frac{N-3}{2}}$ .

При  $1 - \left( 1 + \frac{2}{N-3} \cdot F \right)^{\frac{N-3}{2}} > \varepsilon$  значение  $\rho_k^2$  считается статистически значимым с уровнем значимости  $\varepsilon$ , а при  $1 - \left( 1 + \frac{2}{N-3} \cdot F \right)^{\frac{N-3}{2}} \leq \varepsilon$  — статистически незначимым.

В случае если  $k = \frac{N}{2}$  или  $k = 0$  (т.е. при  $f_{\frac{N}{2}} = \pi$  и  $f_0 = 0$ ) проверка статистической значимости значения  $\rho_k^2$  осуществляется с использованием статистики:

$$t = \frac{N \cdot \rho_N^2}{4 s^2},$$

где  $s^2$  определяется выражением (3), имеющей  $t$  — распределение Стьюдента

$$P(x < t | n = n^*) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}} dt.$$

При  $\int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}} dt > \varepsilon$  значение  $\rho_k^2$  считается статисти-

стически значимым с уровнем значимости  $\varepsilon$ , а в противном случае — статистически незначимым.

После выделения статистически значимых величин  $\rho_{k_j}^2$ ,  $j=1, 2, \dots, q$ , проверяется выполнение условия эквидистантности Фурье частот  $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_q}$ . При положительном результате принимается гипотеза  $H_1$ .

Отклонение гипотез  $H_0$  и  $H_0^*$  означает, что динамический режим либо не имеет проверяемых периодов, либо является хаотическим.

Проиллюстрируем предложенный метод идентификации интервально-периодического режима.

На рис.2 представлен пример спектрограммы, вычисленной по фрагменту периодического решения уравнения Рикера:  $F(x_n) = x_n - a \cdot \exp(-x_n)$ , при  $a = 14.7$ . Длина использованного фрагмента решения  $\{x_n\}$  равна  $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ . Масштаб по оси значений  $\rho_k^2$  на данном рисунке, выбран таким образом, чтобы можно было продемонстрировать используемое в методе свойство спектрограммы.

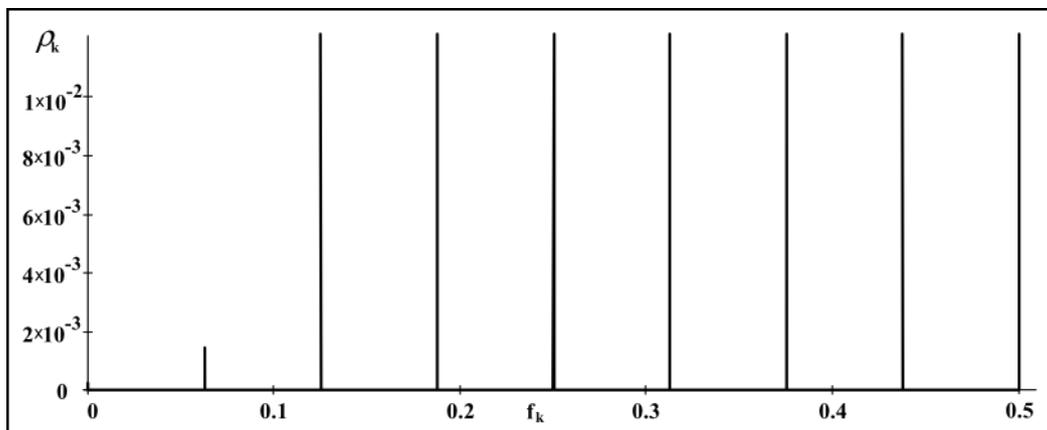
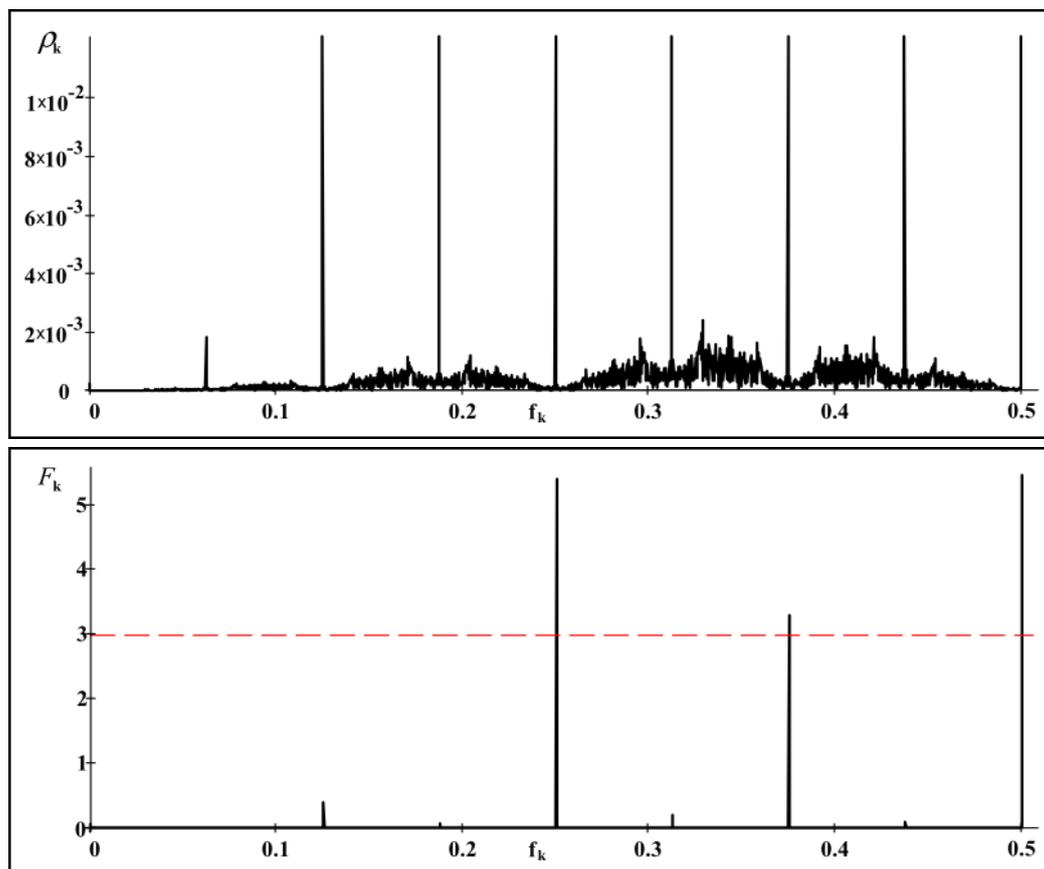


Рис. 2. Спектрограмма периодического решения уравнения Рикера при  $a = 14.7$

Из рисунка 2 видно, что график спектрограммы имеет 8 пиков на Фурье-частотах  $f_{k_j}$  0.0625, 0.125, 0.1875, 0.25, 0.3125, 0.375, 0.4375, 0.5 (номера  $k_j$ , которых соответственно равны 240, 480, 720, 960, 1200, 1440, 1680 и 1920). Все эти пики соответствуют значениям спектрограммы, которые с вычислительной точностью отличны от нуля. По значениям  $k_j$  легко понять, что выполняется условие эквидистантности. Других значений превышающих вычислительную точность спектрограмма не имеет.

На рис.3 представлен график спектрограммы, вычисленной по фрагменту решения уравнения Рикера при  $a=14.786$ . Длина  $N$  фрагмента решения  $\{x_n\}$  равна  $3840=2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ .



**Рис. 3. Спектрограмма решения уравнения Рикера при  $a = 14.786$ .**

Соотношение масштаба частот а) и б) составляет 1:500: значения  $\rho_k^2$  в первой части а) представлены в масштабе 0,01, а во второй части б) они представлены в масштабе 5,00. Пунктирной линией на части б) представлено критическое значение F-критерия при уровне значимости  $\varepsilon = 0.05$ .

Из этого рисунка видно, что спектрограмма имеет большое количество амплитуд  $\rho_k^2$ , значения которых превышают вычислительную точность. Вместе с тем, из критериев, проверяющих статистическую значимость значений спектрограммы при уровне значимости  $\varepsilon = 0.05$ , следует, что из всех

значений спектрограммы выделяются только три статистически значимые: при  $k_j$ , равных 960, 1440 и 1920. При этом данные частоты — эквидистантны. Следовательно, рассматриваемый режим — интервально-периодический.

### **Заключение**

Для анализа характера решения одномерной системы, представленной рекуррентным уравнением, продуктивно использовать портреты в псевдофазовых пространствах с большим лагом. Такие портреты позволяют четко различать виды хаотического решения, а также визуально определять период интервально-периодического решения.

Применение метода кластерного анализа позволяет автоматически осуществлять идентификацию интервально-периодических решений. Представляется возможным получение распределения интервально-периодических решений в пространстве значений параметров системы.

В случае необходимости исследования динамической системы на существование периодических и интервально-периодических режимов без участия человека может быть осуществлена автоматическая идентификация с помощью метода, использующего спектральный анализ на частотах Фурье.

### **Литература**

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Перевод с английского Журбенко И.Г. и Носко В.П. под редакцией Беляева Ю.К. М.: Мир, 1976. 757 с.
2. Кендал М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. Перевод с англ. Пресмана Э.Л., Ротаря В.И., под редакцией Колмогорова А.Н., Прохорова Ю.В. Москва: Наука, 1976. 736 с.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 296 с.