УДК 681.323(075)

Р. И. Цой

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ СИГНАЛА ПО НОВЫМ СИСТЕМАМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются общие принципы разложения сигнала по системам базисных функций. Отмечается, что в течение последних десятилетий стали широко использоваться новые системы функций, такие, например, как кусочно-непрерывные функции Уолша и Хаара. Особое внимание уделяется проблеме сходимости ряда Фурье, которая хорошо исследована только для случая применения тригонометрических и экспоненциальных функций. Однако ряды Фурье, полученные при разложении сигналов по новым системам базисных функций, менее исследованы или не исследовались совсем. В статье показано, что условия сходимости ряда Фурье при приближении по критериям мощности или энергии те же самые, как и при разложении сигналов по классическим системам базисных функций.

Ключевые слова: *система базисных функций, сходимость ряда, Уолш, Хаара.*

Рудольф И. Цой. CONDITIONS OF FOURIER SERIES CONVERGENCE WHILE SIGNAL'S DECOMPOSITION IN NEW SYSTEMS OF BASIS FUNCTIONS (Far Eastern State Academy for Social and Humanity Studies).

General ideas of signal's decomposition in systems of basis functions are discussed. It is noted that during the last decades a new systems of basis functions such, for example, as piecewise Walsh and Haar functions are wide used. Particular attention is given to the problem of Fourier series convergence, which is well studied only for classical systems of basic functions such as trigonometrical and exponential ones. However, the Fourier series, which were obtained by using new systems of basis functions are studied in less degree or not studied at all. It is shown in this paper that the conditions of Fourier series convergence while approaching according to the criteria of power or energy are the same as in a case of signal's decomposition in classical systems of basis functions.

Keywords: *system of basis functions, series convergence, Walsh, Haar.*

Основой линейной теории является идея представления сложного объекта в виде суммы двух и более простых объектов. В случае представления сложного сигнала в ортогональном виде, система может быть определена набором весовых коэффициентов, значения которых описываются некоторыми функциями и представляют собой физические значения спектра сигнала.

Поэтому, актуальным становится задача анализа систем использующих сложные синалы, а затем синтез новых систем с заданными свойствами.

Исследователи обратили внимание на синусоидальные сигналы, которые стали их использовать для синтеза сложных сигналов.

На особые свойства синусоидального сигнала обратили внимание выдающиеся математики Бернули, Эйлер и Фурье. Синусоидальные сигналы обладали замечательными свойствами (плавно изменяли свои значения, не имели разрывов, легко дифференцировались). Эта задача достаточно полно решена математиком Фурье.

В связи с тем, что на практике инженерам и исследователям приходится сталкиваться с сигналами имеющих более сложные формы.

Поэтому в результате стремительного развития цифровой вычислительной техники и современных средств связи стали широко использоваться другие системы функций, такие как функции Уолша, Хаара и Виленкина-Крестенссона.

Современное состояние проблемы спектрального анализа сигналов на основе новых систем базисных функций во всей полноте отражено в работах таких широко известных ученых, как А.М. Трахтман, Л.П. Ярославский, Г.А. Кухарев, В.Г. Лабунц, А.В. Зеленков и многих других.

Следует отметить, что спектральная обработка сигналов, например, в базисах Уолша и Хаара в наибольшей степени удовлетворяет современной элементной базе и тенденциям ее развития. В свою очередь использование кусочно-постоянных систем базисных функций обусловливает задачу построения инвариантов обобщенного спектрального преобразования, изоморфных аналогичным характеристикам в требуемом базисе, т.е. взаимного отображения спектральных характеристик в различных ортогональных базисах.

Некоторые общие результаты по данной проблеме, полученные в работах [1; 2], имеют очень важное теоретико-прикладное значение. В то же время их практическое применение вызывает некоторые затруднений, поскольку установленные аналитические соотношения в ряде случаев не доведены до уровня математических моделей, допускающих разработку на их основе методов синтеза алгоритмических, аппаратных и программных средств.

В последнее время значительное внимание уделялось разработке алгоритмов быстрых спектральных преобразований, на основе новых систем базисных функций [3]. Эта проблема приобретает особую актуальность при обработке двумерных цифровых сигналов, например, при спектральном анализе бинарных и полутоновых изображений, так как в этом случае информационные объемы возрастают в десятки и сотни раз.

Перед тем как непосредственно перейти к требованиям, которым должна отвечать система базисных функций при разложении по ней произвольного сигнала, рассмотрим такое понятие, как область определения сигнала. Если анализируемый сигнал $s(x)$ представлен на некотором конечном интервале, то интервал определения сигнала может быть записан в виде $a < x \le b$ или $x \in (a,b]$.

Для определения сигналов на бесконечном интервале значений независимой переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ обычно используется понятие множества всех действительных чисел R. Если, допустим, x принадлежит множеству R, то это записывается как $x \in R$. Примером функции определенной на множестве R является синусоидальная функция $\sin(x)$. Определим понятие множества или пространства $L^p(R)$ сигналов. Запись $s(x) \in L^p(R)$ означает, что сигнал $s(x)$ принадлежит пространству $L^p(R)$ и при этом выполняется условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^p(x)\, dx < \infty .$$

Например, в теории сигналов [4,5] часто используется понятие гильбертового пространство $L^2(R)$. Если $s(x) \in L^2(R)$, то:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x)\, dx < \infty .$$

Для пространства сигналов определенных на некотором ограниченном интервале от $x = -X/2$ до $x = X/2$ обычно используется обозначение $L^2(-X/2,\ X/2)$ и если $s(x) \in L^2(-X/2,\ X/2)$, то:

$$\int_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\, dx < \infty . \qquad (1)$$

Рассмотрим ряд требований, которым должны отвечать подлежащие разложению в ряд Фурье сигналы для выполнения условий их сходимости. В этой связи прежде всего необходимо отметить, что самые жесткие требования предъявляются к сигналам, когда необходимо обеспечить равномерную сходимость ряда Фурье. В этом случае сигнал на заданном интервале

$$-X/2 \le x \le X/2$$

должен быть абсолютно непрерывным и чтобы представлял собой функцию, интегрируемую с квадратом:

$$\int_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\, \mu(x)\, dx < \infty ,$$

где $\mu(x)$ - положительная непрерывная функция, заданная на том же интервале (весовая функция).

В частности, если в пределах интервала $-X/2 \le x \le X/2$ выполняется условие $\mu(x)=1$, то приходим к более простому выражению (1).

Несколько менее жесткие требования предъявляются к сигналам, когда необходимо обеспечить сходимость ряда Фурье только в пределах конечного числа интервалов. В этом случае достаточно придерживаться требований, сформулированных в теореме Дирихле: если сигнал $s(x)$ с периодом X имеет на интервале $-X/2 \le x \le X/2$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируем, то этот сигнал разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке, к которой он дифференцируем, а в точках разрыва ряд Фурье сходится к

$$(s(x-0)+s(x+0))/2 .$$

В некоторых случаях в условия Дирихле включают требования, чтобы сигнал на любом конечном интервале имел конечное число максимумов и минимумов.

Менее жесткие условия предъявляются к сигналам, когда требуется, чтобы ряд Фурье сходился по мощности или по энергии ошибки. Для этого при конечном интервале определения сигнала достаточно, чтобы сигнал являлся функцией, интегрируемой с квадратом (1).

И, наконец, наименее жесткие требования предъявляются к сигналам, когда ряд Фурье должен сходиться в среднем. Для этого необходимо, чтобы сигнал представлял собой абсолютно интегрируемую функцию:

$$\int_{-X/2}^{X/2} |s(x)|\,dx < \infty .$$

Заметим, что каждое ослабление требований к сигналам естественным образом ведет к расширению класса сигналов, которые можно разлагать в ряд Фурье.

Остановимся на требованиях, которым должна отвечать система функций при разложении по ней произвольного сигнала.

Система базисных функций $\{\eta(k,x)\}$ с весовой функцией $\mu(x)$ должна быть ортогональной на интервале определения сигнала $-X/2 \le x \le X/2$:

$$\int_{-X/2}^{X/2} \eta(k,x)\,\eta(l,x)\,\mu(x)\,dx = \begin{cases} 0 & при\ k \ne l, \\ E_k & при\ k = l, \end{cases}$$

где k и l - порядковые номера соответствующих базисных функций;

E_k - энергия базисной функции $\eta(k,x)$.

Заметим, что условие ортогональности базисной системы не нарушается при умножении функций на постоянные множители.

2. Функции, составляющие базисную систему, на интервале ортогональности $-X/2 \le x \le X/2$ с весом $\mu(x)$ должны иметь конечную энергию:

$$E_k = \int_{-X/2}^{X/2} \eta^2 (k,x)\mu(x)dx < \infty .$$

Система должна состоять из линейно независимых функций. В качестве простейших примеров линейно независимых функций можно привести такие, как t и t^2, $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Действительно, в каждой из этих пар одна функция не может быть получена через другую посредством операции умножения на вещественное число. Заметим, что если две функции $\eta(k,x)$ и $\eta(l,x)$ ортогональны, то они являются линейно-независимыми.

Система функций $\{\eta(k,x)\}$ должна быть упорядоченной по тем или иным признакам, например, по показателю степени, по частоте и т.д. Например:

$$a_0,\ a_1 x,\ a_2 x^2,\ \ldots,\ a_k x^k,\ \ldots$$

$$1,\ \cos\omega x,\ \cos 2\omega x,\ \ldots,\ \cos k\omega x .$$

При разложении сигналов желательно, чтобы составляющие базисную систему функции были нормированы по энергии

$$E_k = \int_{-X/2}^{X/2} \eta^2(k,x)\mu(x)dx = 1,$$

или по мощности

$$P_k = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} \eta^2(k,x)\mu(x)dx = 1.$$

Заметим, что в данном случае энергия и мощность пронормированы относительно веса $\mu(x)$ к единице, хотя в общем случае их можно пронормировать к любой другой константе.

Не трудно показать, что при необходимости систему базисных функций $\{\eta(k,x)\}$, используемую для разложения сигналов, можно преобразовать к нормализованной форме. Для этого представим сигнал $s(x)$ в виде линейной комбинации этих функций:

$$s(x) = C(0)\eta(0,x) + C(1)\eta(1,x) + \ldots + C(N)\eta(N,x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(k)\eta(k,x) , \qquad (2)$$

где $C(k)$ - коэффициенты ряда Фурье:

$$C(k) = \frac{\int\limits_{-X/2}^{X/2} s(x)\eta(k,x)\mu(x)\,dx}{\int\limits_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\mu(x)\,dx}.$$

Разделив и умножив каждое слагаемое этой комбинации на $\sqrt{P_k}$, получаем:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{N} C(k)\sqrt{P_k}\,\frac{\eta(k,x)}{\sqrt{P_k}} = \sum_{k=0}^{N} \hat{C}(k)\hat{\eta}(k,x),$$

где $\hat{\eta}(k,x) = \frac{1}{\sqrt{P_k}}\eta(k,x)$,

$\hat{C}(k) = C(k)\sqrt{P_k}$ — нормированные коэффициенты разложения.

Очевидно, что

$$P_k = \frac{1}{X}\int\limits_{-X/2}^{X/2} \hat{\eta}^2(k,x)\mu(x)\,dx = \frac{1}{P_k\,X}\int\limits_{-X/2}^{X/2} \eta^2(k,x)\mu(x)\,dx = 1.$$

Для того чтобы по некоторой конкретной системе базисных функций $\{\eta(k,x)\}$ можно было разложить любой сигнал из заданного множества сигналов, необходимо, чтобы она была полной. В противном случае по ней можно разложить только некоторое ограниченное подмножество сигналов, на которые накладываются определенные ограничения.

Например, по неполной системе можно разложить только подмножество четных сигналов или только подмножество нечетных сигналов и т.д. Другими словами, по неполной системе невозможно разложить сигнал, совпадающий с функцией, отсутствующей в выбранной базисной системе. В связи с важностью этих понятий остановимся на них более подробно. Запишем среднюю квадратическую ошибку аппроксимации сигнала $s(x)$ с весом $\mu(x)$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{X}\int\limits_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\mu(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} C^2(k)P_k\mu(x).$$

Из данного выражения, как известно, следует неравенство Бесселя:

$$P = \frac{1}{X}\int\limits_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\mu(x)\,dx \geq \sum_{k=0}^{N} C^2(k)P_k\mu(x). \qquad (3)$$

В пределе при $N \to \infty$ сумма $\sum_{k=0}^{\infty} C^2(k) P_k \mu(x)$ сходится к интегралу $\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\mu(x)dx$ и ошибка аппроксимации σ^2 стремится к нулю. В результате приходим к известному равенству Парсеваля:

$$\frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\mu(x)dx = \sum_{k=0}^{N} C^2(k) P_k \mu(x). \tag{4}$$

Равенство Парсеваля можно интерпретировать следующим образом: средняя мощность сигнала $s(x)$ равна сумме мощностей всех его спектральных составляющих. Заметим, что возможность их суммирования является прямым следствием ортогональности базисных функций. Выполнение равенства Парсеваля свидетельствует о полноте используемой системы базисных функций.

Так как в данном случае рассматриваются сигналы с конечной мощностью $P < \infty$, то ряд в правой части равенства является сходящимся, причем сходимость может быть обеспечена только в том случае, если значения коэффициентов Фурье при $k \to \infty$ стремятся к нулю:

$$\lim_{k \to \infty} C(k) = 0.$$

В литературных источниках можно встретить различные, иногда противоречивые определения условий сходимости ряда Фурье. В значительной степени это объясняется тем, что на настоящий момент времени вопрос о сходимости ряда Фурье наиболее глубоко исследован при разложении сигналов прежде всего по классическим системам базисных функций: тригонометрической и экспоненциальной. Ряды Фурье, полученные при разложении сигналов по другим системам базисных функций, менее исследованы или не исследовались совсем. В то же самое время на основе результатов проведенных исследований можно предположить, что условия их сходимости при приближении по критериям мощности или энергии те же самые, как и при разложении сигналов по классическим системам базисных функций.

В общем случае формально составленный для сигнала $s(x)$ ряд Фурье по любой заданной на интервале $-X/2 \le x \le X/2$ ортогональной системе функций может расходится на бесконечном множестве точек или сходится, причем не обязательно к сигналу $s(x)$. Такая ситуация может иметь место даже при использовании таких известных ортогональных систем, как тригонометрические системы функций или система полиномов Лежандра. В связи с этим для оценки степени сходимости рядов Фурье наиболее часто используются следующие критерии.

Ряд Фурье для сигнала $s(x)$ считается сходящемся к этому сигналу в среднем на интервале $-X/2 \le x \le X/2$, если:

$$\int_{-X/2}^{X/2} \left[s(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, \eta(k,x) \right]^2 dx \to 0\,.$$

Ряд Фурье для сигнала $s(x)$ считается сходящемся к этому сигналу в среднем с весом $\mu(x) > 0$ на интервале $-X/2 \le x \le X/2$, если:

$$\int_{-X/2}^{X/2} \left[s(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C(k)\, \eta(k,x) \right]^2 \mu(x)\, dx \to 0\,.$$

Отметим, что для широкого класса практических приложений рядов Фурье сходимости в среднем оказывается достаточным.

Система ортогональных базисных функций $\{\eta(k,x)\}$ считается замкнутой, если любой непрерывный сигнал $s(x)$ на интервале $-X/2 \le x \le X/2$, для которого выполняется условие (1), может с любой степенью точности аппроксимирован в среднем линейными комбинациями функций составляющих эту систему. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N и такие наборы базисных функций $\eta(0,x),...,\eta(N,x)$ с коэффициентами $C(0),...,C(N)$, что

$$\int_{-X/2}^{X/2} \left[s(x) - \sum_{k=0}^{N} C(k)\, \eta(k,x) \right]^2 \mu(x)\, dx < \varepsilon\,.$$

Пусть, в частности, $\{\eta(k,x)\}$ представляет собой ортонормированную систему базисных функций. Тогда справедлива следующая теорема.

Для замкнутости ортонормированной системы $\{\eta(k,x)\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого непрерывного сигнала $s(x)$, удовлетворяющего условию (1), выполнялось равенство Парсеваля (4).

Другими словами, требуется, чтобы для всякого непрерывного сигнала $s(x)$, который удовлетворяет требованию (1), неравенство Бесселя (3) превращалось в равенство Парсеваля (4).

Доказательство. Если система базисных функций $\{\eta(k,x)\}$ замкнута, то для любого непрерывного сигнала $s(x)$, который удовлетворяет условию (1), при достаточно большом N значение средней квадратической ошибки аппроксимации

$$\sigma^2 = \frac{1}{X}\int_{-X/2}^{X/2} s^2(x)\,\mu(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} C^2(k)\,P_k\,\mu(x)$$

становится как угодно малыми и неравенство (3) обращается в равенство (4). С другой стороны, если для любого непрерывного сигнала $s(x)$, который удовлетворяет условию (1), неравенство (3) переходит в равенство, то при некотором значении N величина σ^2 становится как угодно малой, и, следовательно, сигнал $s(x)$ как угодно хорошо аппроксимируется в среднем линейными комбинациями базисных функций.

Из доказанной теоремы следует, что если система $\{\eta(k,x)\}$ является замкнутой системой ортогональных функций, то ряды Фурье всех непрерывных сигналов, которые удовлетворяют условию (1), сходятся в среднем к этим сигналам.

Поэтому, если в случае замкнутости системы $\{\eta(k,x)\}$ ряд Фурье некоторого непрерывного сигнала $s(x)$, который удовлетворяет условию (1), сходится в среднем к некоторому непрерывному сигналу $\hat{s}(x)$, который также удовлетворяет условию (1), то имеет место тождество $s(x) \equiv \hat{s}(x)$, т.е. сходимость в среднем может быть только к одному непрерывному сигналу.

Литература

1. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Минск, Наука и техника, 1978. 293 с.
2. Садыхов Р.Х. Матричные операторы интегрирования и дифференцирования системы Уолша. Теория и методы автоматизации проектирования. Минск, 1981. Вып. 3. 195 с.
3. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при цифровой обработке сигналов. М.: Мир, 1980. 237 с.
4. Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов. М.: Советское радио, 1873. 368 с.
5. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Советское радио, 1975. 352 с.