УДК 511.17

**Б. Е. Фишман**

# К ВОПРОСУ О ФОРМУЛЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

*В статье рассмотрена задача нахождения формулы любого нечетного простого числа. Указанная задача решена как дополнительная к задаче нахождения формулы любого нечетного составного числа. При этом для построения формулы любого нечетного составного числа оказались достаточными методы элементарной математики.*

***Ключевые слова**: Нечетные простые числа, Нечетные составные числа, Дополнительность задач нахождения формулы любого нечетного простого числа и формулы любого нечетного составного числа, Формула любого нечетного составного числа, Формула любого нечетного простого числа*

***Fishman Boris E. On the formula of prime numbers***

*The article discusses the problem of finding a formula of any odd prime number. This problem is solved as an extra to the problem of finding a formula of any odd composite number. At the same time to build a formula of any odd composite number the methods of elementary mathematics were sufficient.*

***Key words**: Odd prime numbers, Odd composite numbers, Additional character of tasks of finding a formula of any odd prime number and the formula of any odd composite number, Formula of any odd composite number, Formula of any odd prime number*

1. Известны многочисленные и неудачные попытки решить задачу построения формулы простых чисел [1]. Продолжительность периода таких попыток (вероятно, начавшегося со времен Эвклида) привела к своеобразному мораторию на постановку этой задачи и на рассмотрение попыток ее решения.

Однако неожиданность и некоторая поучительность ситуации с задачей построения формулы простых чисел заключается в том, что ее решение может быть получено как тривиальное следствие решения другой задачи, дополнительной к данной. При этом структура решения дополнительной задачи оказывается намного проще ожидаемой.

2. Сформулируем дополнительную задачу. Если $\boldsymbol{N}_{2n+1}$ - множество нечетных натуральных чисел, $\boldsymbol{P}_{2n+1}$ - множество простых чисел за исключением числа 2, а $\boldsymbol{S}_{2n+1}$ - множество нечетных составных чисел, то

$$\boldsymbol{N}_{2n+1} = \boldsymbol{P}_{2n+1} \cup \boldsymbol{S}_{2n+1} \qquad (1)$$

При этом

$$\boldsymbol{P}_{2m+1} \cap \boldsymbol{S}_{2n+1} = \varnothing \qquad (2)$$

Отсюда следует, что если будет построена формула для всех чисел множества $\boldsymbol{S}_{2n+1}$, тем самым будет решена прямая задача получения формулы для всех чисел множества $\boldsymbol{P}_{2n+1}$.

Справедлива следующая **теорема 1**, определяющая все числа множества $\boldsymbol{S}_{2n+1}$:

Для того чтобы число

$$x = 2a + 1 \in \boldsymbol{S}_{2n+1} \qquad (3)$$

необходимо и достаточно, чтобы $a = 2mn + m + n$, где $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство.

*Необходимость*.

Пусть

$$a = 2mn + m + n \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$x = 2(2mn + m + n) + 1 = 2n(2m+1) + 2m + 1 = (2m+1)(2n+1).$$

Следовательно, $x \in \boldsymbol{S}_{2n+1}$.

*Достаточность*.

Пусть $x \in \boldsymbol{S}_{2n+1}$. Это означает, что

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} \cdot \boldsymbol{x_2}, \ \ \boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{N}_{2n+1}, \ \ \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{N}_{2n+1}.$$

Поскольку

$\boldsymbol{x}_{1,2} \in \boldsymbol{N}_{2n+1}$, то $x_1 = 2m + 1, \ \ m \in \boldsymbol{N}$, $x_2 = 2n + 1, \ \ n \in \boldsymbol{N}$.

Тогда

$x = (2m+1)(2n+1) = 2(2mn + m + n) + 1 = 2a + 1$, где $a = 2mn + m + n$.

Теорема доказана.

**Следствие 1**. Число $x=2a+1\in \boldsymbol{P}_{2n+1}$, если

$$a\neq 2mn+m+n \qquad (5)$$

Таким образом, следствие 1 представляет искомую формулу простых чисел как побочный результат решения дополнительной задачи о формуле нечетных составных чисел.

**Следствие 2**. Существует бесконечное множество натуральных чисел, которые не могут быть представлены выражением (4): $a=2mn+m+n,$ где. $m,n\in\boldsymbol{N}$.

Из теоремы 1 следует, что если в числе $x=2a+1$ значение $a$ представлено выражением (4), то это число $\boldsymbol{x\in S_{2n+1}}$, а если значение $a$ не представлено выражением (4), то $x\in P$. Тогда из бесконечности множества $\boldsymbol{P}$ следует бесконечность множества натуральных чисел, которые не могут быть представлены выражением (4).

3. Аналогично предыдущему можно доказать следующие теоремы.

**Теорема 2**. Число

$$x=4b+(-1)^{i+j}\in \boldsymbol{S_{2n+1}},\ i=1,2;\ j=1,2 \qquad (6)$$

тогда и только тогда, когда

$$b=4mn+(-1)^{i}m+(-1)^{j}n,\ \ i=1,2;\ j=1,2 \qquad (7)$$

**Теорема 3**. Число

$$x=6c+(-1)^{i+j}\in \boldsymbol{S_{2n+1}},\ i=1,2;\ j=1,2 \qquad (8)$$

тогда и только тогда, когда

$$c=6mn+(-1)^{i}m+(-1)^{j}n,\quad i=1,2;\ j=1,2 \qquad (9)$$

4. Заметим, что Теорема 3 позволяет легко ответить на вопрос $P_{96}^{2}$ книги В. Серпинского [2, с. 30]: существует ли бесконечное множество натуральных чисел, которые не могут быть представлены ни одним из четырех видов

$$c=6xy\pm x\pm y,\quad x,y\in\boldsymbol{N}. \qquad (10)$$

Действительно, из теоремы 3 следует, что всем простым числам вида

$$p=6c\pm 1 \qquad (11)$$

соответствуют такие числа с, которые не могут быть представлены ни одним из четырех видов (10). С другой стороны, из всех возможных видов натуральных чисел $6c-2;6c-1;6c;6c+1;6c+2;6c+3$ простые числа имеют вид

$$\text{либо } 6c-1, \text{ либо } 6c+1.$$

Таким образом, все простые числа относятся к одному из двух видов (11). Тогда из бесконечности множества простых чисел следует существование бесконечного множества натуральных чисел, которые не могут быть представлены ни одним из четырех видов (10). Аналогично можно доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, которые не могут быть представлены ни одним из четырех видов

$$b = 4xy \pm x \pm y, \quad x, y \in \boldsymbol{N}. \tag{12}$$

5. Решение обратной задачи заключается в том, чтобы определить, является ли простым нечетное число $x = 2a + 1$. Это означает, что необходимо определить, имеет ли корни $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$ уравнение

$$2mn + m + n = a, \tag{13}$$

где $a$ – заданное число.

Гипотеза о том, что существует некоторый универсальный признак разрешимости уравнения (13), представляется автору неверной. Поэтому, по мнению автора, решение обратной задачи заключается в построении эффективного алгоритма нахождения уравнения (13). Такой алгоритм будет представлен в следующей публикации. Для иллюстрации его эффективности будет рассмотрено число Ферма $2^{2^5}+1$, для которого

$$m = 2^6(2^{16} - 2^{14} + 2^{12} - 2^{10} + 2^7 - 2^3 + 2^2 - 1), \quad n = 2^8 + 2^6.$$

**Литература**

1. Берман Г.Н. Число и наука о нем. – М.: Физматгиз, 1960. – 164 с.
2. Серпинский В. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. На границе геометрии и арифметики. / Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1961. – 75 с.
3. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. – М. – Л.: Физматгиз, 1963. – 92 с.